Cálculo Diferencial e Integral

1) Función Número de miembros $N(x)=50(2x^3-15x^2+36x+2)$

a) Socios fundadores, haciendo $x=0$, $\boxed{T(0)=100}$

b) Aumento de socios.- Derivando $N'(x)=50(6x^2-30x+36)$, igualando a cero:

$$N'(x)=50(6x^2-30x+36)=0\Rightarrow 6x^2-30x+36=0\Rightarrow x^2-5x+6=0\Rightarrow\left\langle\begin{array}{l}x=3\\x=2\end{array}\right.$$

Estudiamos crecimiento de la función:

- $T'(1)=600>0$ luego en $(0,2)$ crece
- $T'(2.5)=-75<0$ luego en $(2,3)$ decrece
- $T'(4)=600>0$ luego en $(3,+\infty)$ crece

Aumenta el número de socios en $\boxed{(2,3)\cup(3,+\infty)}$

---

2) Sea $x=pts$, se tiene:

- Venta total: $(50+x)(200-2x)$
- Coste total: $40(200-2x)$

Función beneficio: $B(x)=(50+x)(200-2x)-40(200-2x)=(10+x)(200-2x)=2000+180x-2x^2$

Derivando: $B'(x)=180-4x=0\Rightarrow x=45$, derivando de nuevo $B''(x)=-4<0\Rightarrow$ es máximo

Cada helado lo venderá a $50+45=\boxed{95\ pts}$

---

3) Sea $\left\{\begin{array}{l}x=ancho\\y=\text{largo}\\z=alto\end{array}\right\}$ Se tiene $\left\{\begin{array}{c}x=z\\x+y+z=72\end{array}\right.$ sustituyendo: $2x+y=72\Rightarrow y=72-2x$

$Volumen=xyz=\text{sustituyendo}=x^2(72-2x)\Rightarrow V(x)=72x^2-2x^3$

Derivando: $V'(x)=144x-6x^2=0\Rightarrow x(144-6x)=0\Rightarrow\left\langle\begin{array}{l}x=0\\x=\frac{144}{6}=24\end{array}\right.$ Como $x\neq 0$, $\boxed{x=z=y=24}$.

Se trata de un cubo de arista 24 cm

---

4) Sabemos que $velocidad=\frac{espacio}{tiempo}\Rightarrow v=\frac{ds}{dt}\Rightarrow s=\int v\cdot dt$

Así: $s=\int_0^3 (80+3x)\,dx+\int_4^6 (108-x)\,dx=\left[80x+\frac{3x^2}{2}\right]_0^3+\left[108x-\frac{x^2}{2}\right]_4^6=\boxed{\frac{919}{2}}$

---

5) $y=x^3+3x^2$, $D=R$ (es un polinomio)

Derivando: $y'=3x^2+6x=0\Rightarrow x(x+2)=0\Rightarrow\left\langle\begin{matrix}x=0\\x=-2\end{matrix}\right.$. Sustituyendo: $\left\langle\begin{matrix}x=0\Rightarrow y=0\\x=-2\Rightarrow y=4\end{matrix}\right.$

Derivando de nuevo: $y''=6x+6\Rightarrow\left\langle\begin{matrix}y''(0)=6>0\\y''(-2)=-6<0\end{matrix}\right.$, luego $\boxed{(0,0)}$ mínimo, $\boxed{(-2,4)}$ máximo

Igualando la 2ª derivada a cero: $6x+6=0\Rightarrow x=-1$, derivando de nuevo: $y'''=6\neq 0$

Luego $\boxed{(-1,2)}$ punto de inflexión.

---

6) Sabemos que $P(x)=ax^2+bx+c$. Derivando $P'(x)=2ax+b\Rightarrow P''(x)=2a=4\Rightarrow a=2$

Si $x=-1$ es un mínimo $P'(-1)=0\Rightarrow -2a+b=0$, como $a=2$, $b=4$

Como $P(1)=17\Rightarrow a+b+c=17\Rightarrow$ sustituyendo a y b $6+c=17\Rightarrow c=11$

Así: $\boxed{P(x)=2x^2+4x+11}$

Monotonía.- $P'(x)=4x+4=0\Rightarrow x=-1$

- $P'(-2)=-4<0$ luego en $(-\infty,-1)$ decrece
- $P'(0)=4>0$ luego en $(-1,+\infty)$ crece

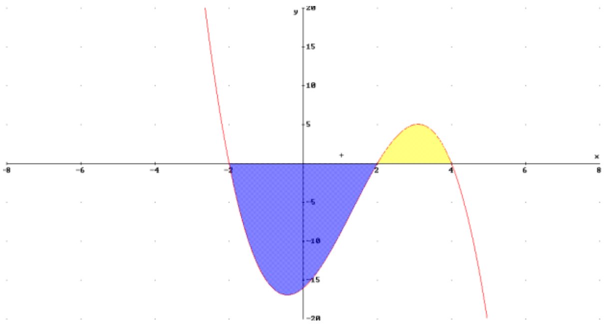
---

7) $y=-(x+2)(x-2)(x-4)=$ operando $=-(x^2-4)(x-4)=-x^3+4x^2+4x-16$

a) Recta tangente en $x=0$.- $y-y(0)=y'(0)(x-0)$ (1)

Derivando: $y'=-3x^2+8x+4\Rightarrow y'(0)=4$. Como $y(0)=-16$, sustituyendo en (1)

$y+16=4(x-0)\Rightarrow\boxed{y=4x-16}$



b) Area entre función y eje OX

Tal como está dada la función, corta al eje OX

en los puntos $(-2,0),(2,0),(4,0)$

Así:

$$A=-\int_{-2}^{2}(-x^3+4x^2+4x-16)\,dx+\int_2^4(-x^3+4x^2+4x-16)\,dx=$$

$$=-\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}-16x\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}-16x\right]_2^4=\frac{128}{3}+\frac{20}{3}=\boxed{\frac{148}{3}}$$

---

8) Consideremos $f(t) = e^{2t} + 1000$, nos piden $\int_1^3 (e^{2t} + 1000)\,dt = \left[\frac{e^{2t}}{2} + 1000t\right]_1^3 = \frac{e^6}{2} + 3000 - \left(\frac{e^2}{2} + 1000\right) =$

$= \frac{e^6 - e^2}{2} + 2000$. Tomando $e = 2.71$, obtenemos aproximando $\boxed{2198\, personas}$

---

9) Sea $y(t) = n\exp(-0{,}0004t) = ne^{-0.0004t}$

a) $y(200) = 500e^{-0.00040.08} = \boxed{461.558\, gramos}$

b) Derivando $y'(t) = (-0.0004)\cdot 500 \cdot e^{-0.0004t} = \boxed{-0.2\cdot e^{-0.0004t}\ gramos}$

c) $y'(1000) = -0.2\cdot e^{-0.00041000} = \boxed{-0.2\cdot e^{-0.4}}$

d) $y'(t) = -0.1637 \Rightarrow -0.2\cdot e^{-0.0004t} = -0.1637 \Rightarrow e^{-0.0004t} = 0.8125 \Rightarrow -0.0004t = -0.2 \Rightarrow \boxed{t = 500\ años}$

---

10) a) $y = x^2 - 5x + 6$

- Cortes Ejes:

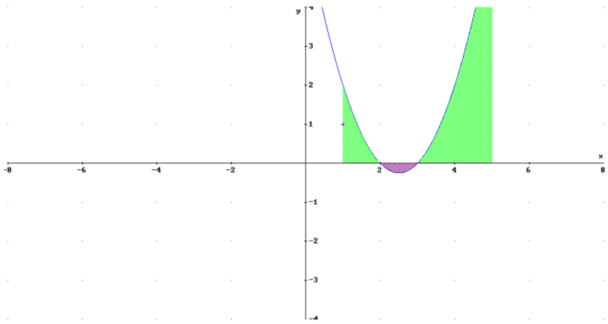
  con OX : $y = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x = 2 \\ x = 3 \end{array} \right.$

  $(2,0)$ y $(3,0)$

  con OY: $x = 0 \Rightarrow y = 6\ \ (0,6)$

- Maximos-Mínimos: $y' = 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

- Vértice.- Es el mínimo $V = \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$



b) $A = \int_1^2 (x^2 - 5x + 6)\,dx - \int_2^3 (x^2 - 5x + 6)\,dx + \int_3^5 (x^2 - 5x + 6)\,dx =$

$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x\right]_1^2 - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x\right]_2^3 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x\right]_3^5 = \frac{5}{6} - \left(-\frac{1}{6}\right) + \frac{14}{3} = 1 + \frac{14}{3} = \boxed{\frac{17}{3}}$

---

11) Sea $y(t) = 100 + 200e^{0.2t}$

a) $y(0) = 100 + 200e^{0} = 100 + 200 = \boxed{300}$

b) $y'(t) = 0.2\cdot 200e^{0.2t} = \boxed{40\cdot e^{0.2t}}$

c) $40\cdot e^{0.2t} = 832.42 \Rightarrow e^{0.2t} = 20.08 \Rightarrow 0.2t \approx 3 \Rightarrow \boxed{t = 15}$ (el 15 de Enero)

---

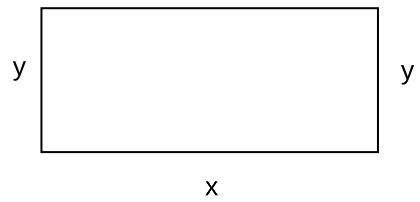
12) Sabemos que $y'(t) = 10t - 50 \Rightarrow y(t) = \int (10t - 50)\cdot dt = \frac{10t^2}{2} - 50t + C \Rightarrow y(t) = 5t^2 - 50t + C$

Sabemos que $y(0)=300000 \Rightarrow C=300000 \Rightarrow y(t)=\ y(t)=5t^2-50t+300000$

El valor pedido será: $y(5)=5\cdot 5^2-50\cdot 5+300000=\boxed{299.875\ pts}$

---

13) Sean x e y las medidas del campo (ver figura). Sabemos que $Perimetro=x+2y\Rightarrow$



$$\Rightarrow 300x+200y=300000 \Rightarrow 3x+2y=3000 \Rightarrow y=\frac{3000-3x}{2}$$

Como $Area=x\cdot y\Rightarrow S(x)=x\cdot\left(\frac{3000-3x}{2}\right)=\frac{3000x-3x^2}{2}$

(función a maximizar)

Derivando: $S'(x)=\frac{1}{2}(3000-6x)=0\Rightarrow x=500$, luego $y=\frac{3000-1500}{2}=750$

Area máxima: $500\cdot 750=\boxed{375000m^2}$

---

14) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si \quad x<2 \\ 2x-1 & si \quad 2\le x<4 \\ 5 & si \quad x\ge 4 \end{cases}$

a) <u>Continuidad</u>.- Estudiamos lo que ocurre en los puntos $x=2$, $x=4$

- En $x=2$

  $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2}(x^2+1)=5$; $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2}(2x-1)=3$. Como son distintos, la función no es continua en el punto

- En $x=4$

  $\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4}(2x-1)=7$; $\lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4}(5)=3$. Como son distintos, la función no es continua en el punto.

Con lo que $f(x)$ es continua en $R-\{2,4\}$

b) Recta tangente en $x=-2$. Su ecuación es: $y-y(-2)=y'(-2)(x+2)$

Derivando $f'(x)=\begin{cases} 2x & si \quad x<2 \\ 2 & si \quad 2<x<4 \\ 0 & si \quad x>4 \end{cases}$. Así: $y'(-2)=2(-2)=-4$. Como $y(-2)=(-2)^2+1=5$,

Se tiene: $\boxed{y-5=-4(x+2)}$

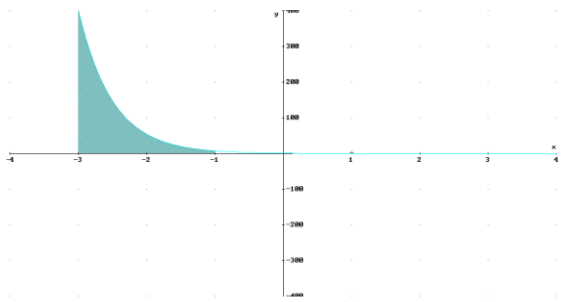
---

15) Consideremos $y=e^{-2x}$, $x=-3$, $x=-1$ y el eje OX

La curva $y=e^{-2x}$ corta al eje OY en el punto $(0,1)$, al eje OX no lo corta.

$$A=\int_{-3}^{-1}(e^{-2x})\,dx=\left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_{-3}^{-1}=\left(-\frac{1}{2}e^{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}e^{6}\right)=$$

$$=-\frac{e^2}{2}+\frac{e^6}{2}=\boxed{\frac{e^6-e^2}{2}}$$



---

16) Sea la función: $y=\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2$

a) Derivando dos veces: $y'=\frac{4}{12}x^3+\frac{3}{6}x^2+\frac{2}{2}x=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\Rightarrow y''=\frac{3}{3}x^2+\frac{2}{2}\;x+1=x^2+x+1$

Al igualar a cero la 2ª derivada observamos que no tiene raíces reales. Luego <u>no tiene puntos de inflexión</u>

b) Igualando la 1ª derivada a cero $y'=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x=0\Rightarrow 2x^3+3x^2+6x=0\Rightarrow x(2x^2+3x+6)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\left\langle\begin{array}{c}x=0\\2x^2+3x+6=0\end{array}\right.$ Como la ecuación de 2º grado no tiene raíces reales, la solución es $x=0$

Sustituyendo en la 2ª derivada: $y''(0)=1>0\Rightarrow\boxed{(0,0)\min}$. No tiene máximos.

---

17) Se trata de hallar el máximo de $s(x)=2x^3-15x^2+24x+26$. Derivando: $s'(x)=6x^2-30x+24$

Igualando a cero, $6x^2-30x+24=0\Rightarrow x^2-5x+4=0\Rightarrow\left\langle\begin{array}{l}x=1\\x=4\end{array}\right.$

a) Calculamos derivada segunda: $s''(x)=12x-30$. Sustituyendo: $\left\langle\begin{array}{l}s''(1)=-18<0\\s''(4)=18>0\end{array}\right.$, luego el máximo es $\boxed{x=1}$

Luego el mayor número de socios lo tuvo el club el <u>primer año</u>

b) Cuatro años más tarde el club tuvo el número mínimo de socios (ver apartado a). No tuvo éxito

---

18) Sea $f(x)=2x^3+bx^2+ax-5$

a) Derivando: $f'(x)=6x^2+2bx+a$. Como tiene un máximo en $x=1$ y un mínimo en $x=2$, se tiene:

$\left\langle\begin{array}{l}f'(1)=0\Rightarrow 6+2b+a=0\\f'(2)=0\Rightarrow 24+4b+a=0\end{array}\right\rangle$. Resolviendo: $\boxed{a=12}$, $\boxed{b=-9}$

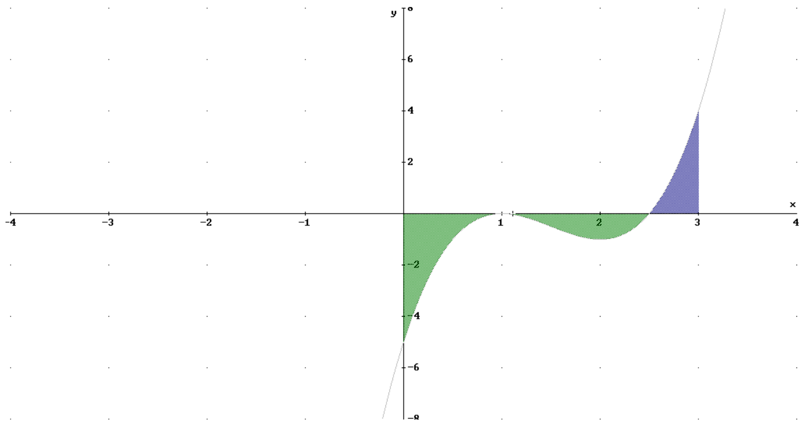
b) Sustituyendo los valores de a) $f(x)=2x^3-9x^2+12x-5$. Observando la gráfica:

$$A = -\int_0^1 (2x^3 - 9x^2 + 12x - 5)\,dx - \int_1^{5/2} (2x^3 - 9x^2 + 12x - 5)\,dx + \int_{5/2}^{3} (2x^3 - 9x^2 + 12x - 5)\,dx$$

Como $\int (2x^3 - 9x^2 + 12x - 5)\,dx = \frac{2x^4}{4} - \frac{9x^3}{3} + \frac{12x^2}{2} - 5x + C = \frac{x^4}{2} - 3x^3 + 6x^2 - 5x + C$, sustituyendo:

$$A = -\left[\frac{x^4}{2} - 3x^3 + 6x^2 - 5x\right]_{-3}^{-1} - \left[\frac{x^4}{2} - 3x^3 + 6x^2 - 5x\right]_{1}^{5/2} + \left[\frac{x^4}{2} - 3x^3 + 6x^2 - 5x\right]_{5/2}^{3} =$$

$$= -\left(-\frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{27}{32}\right) + \frac{27}{32} = \frac{3}{2} + 2\cdot\frac{27}{32} = \frac{3}{2} + \frac{27}{16} = \boxed{\frac{51}{16}}$$



---

19) Sabemos que $f(t) = \sqrt{-2t^2 + 8t}$ donde t número de años

a) Si $\sqrt{-2t^2 + 8t} = \sqrt{6} \Rightarrow -2t^2 + 8t = 6 \Rightarrow 2t^2 - 8t + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases}$ luego en el $\boxed{\textit{primer y tercer año}}$

b) La máxima altura se obtiene calculando el máximo de $f(t)$

Derivando: $f'(t) = \frac{-4t + 8}{2\sqrt{-2t^2 + 8t}} = 0 \Rightarrow \frac{-2t + 4}{\sqrt{-2t^2 + 8t}} = 0 \Rightarrow -2t + 4 = 0 \Rightarrow t = 2$

Derivando de nuevo: $f''(t) = \frac{-4\sqrt{2}}{\sqrt{(4t - t^2)^3}} \Rightarrow f''(2) = \frac{-4\sqrt{2}}{\sqrt{(8-4)^3}} = \frac{-4\sqrt{2}}{8} = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$, luego el máximo se alcanza al $\boxed{\textit{segundo año}}$. Dicho máximo vale $\boxed{f(2) = \sqrt{8}}$

---

20) Sea $f(x) = 3x - x^3$. Su dominio es R (es un polinomio)

a) Derivando: $f'(x) = 3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

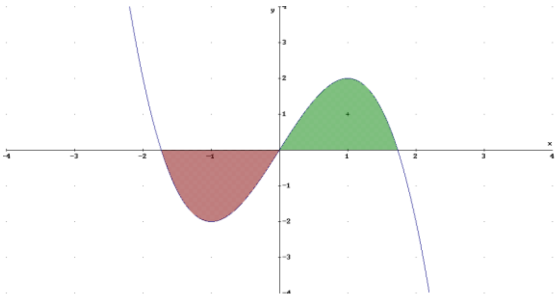
Derivando de nuevo:

$f''(x)=-6x \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} f''(-1)=6>0 \\ f''(1)=-6<0 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{(-1,-2)}$ es mínimo

y $\boxed{(1,2)}$ máximo

Como $f''(x)=-6x=0 \Rightarrow x=0$ y $f'''(x)=-6\neq 0 \Rightarrow$

$\boxed{(0,0)}$ es un punto de inflexión.



b)

$$A=-\int_{-\sqrt{3}}^{0}(3x-x^3)\,dx+\int_{0}^{\sqrt{3}}(3x-x^3)\,dx=-\left[\frac{3x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_{-\sqrt{3}}^{0}+\left[\frac{3x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{\sqrt{3}}=-\left(-\frac{9}{4}\right)+\frac{9}{4}=\frac{18}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A=\frac{9}{2}}$$

---

21) Como el denominador no tiene raíces reales. El dominio de $f(t)=\dfrac{30t}{t^2-2t+4}$ es R

a) La tasa de cambio la obtenemos derivando la función, $f'(t)=\dfrac{30(4-t^2)}{\left(t^2-2t+4\right)^2}$. En el cuarto día sustituimos t

por 4, $\boxed{f'(4)=-\dfrac{5}{2}}$

b) Igualando la derivada a cero: $f'(t)=\dfrac{30(4-t^2)}{\left(t^2-2t+4\right)^2}=0\Rightarrow 30(4-t^2)=0\Rightarrow 4-t^2=0\Rightarrow t=2$

($t=-2$ no es válida pues $t>0$)

Calculando la segunda derivada: $f''(t)=\dfrac{60(t^3-12t+8)}{\left(t^2-2t+4\right)^3}\Rightarrow f''(2)=-\dfrac{15}{2}<0$, luego el máximo se alcanza el

$\boxed{\textit{segundo día}}$ y el valor será $f(2)=\boxed{15}$ enfermos

c) Calculamos $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{30t}{t^2-2t+4}=0$, luego la enfermedad se extinguirá

---

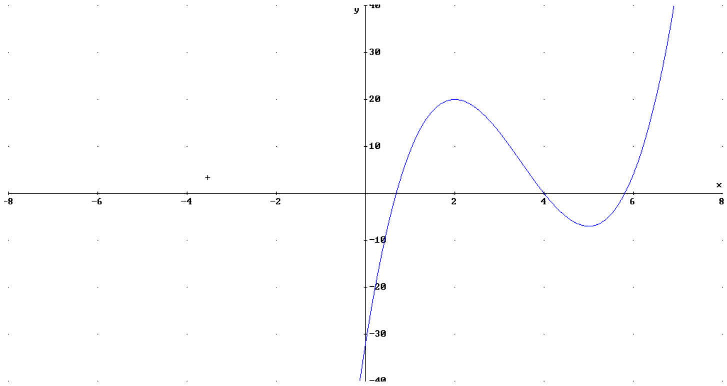
22) Sea $f(x)=-x^3+26x$. Si las rectas tangentes tienen que ser paralelas a las rectas $y=-x$, sus pendientes valdrán -1. Derivando $f'(x)=-1\Rightarrow -3x^2+26=-1\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x=\pm 3$. Sustituyendo en la curva obtendremos los puntos de tangencia $\left\langle \begin{array}{l} f(-3)=27-78=-51 \\ f(3)=-27+78=51 \end{array} \right\rangle \Rightarrow P_1(-3,-51)$ y $P_2(3,51)$. Calculamos rectas tangentes:

- $y-f(-3)=-(x+3)\Rightarrow \boxed{y+x+54=0}$
- $y-f(3)=-(x-3)\Rightarrow \boxed{y+x-54=0}$

23) $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x - 32$

a) Máximos y mínimos.- Derivando $f'(x) = 6x^2 - 42x + 60 = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x = 2,\ x = 5$

Derivando de nuevo $f''(x) = 12x - 42 \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} f''(2) = -18 < 0 \\ f''(5) = 18 > 0 \end{matrix} \right\rangle \Rightarrow$ En $\boxed{x = 2}$ existe un máximo y en $\boxed{x = 5}$ un mínimo.



b) Crecimiento y Decrecimiento.-

De la derivada primera:

$f'(x) = 6x^2 - 42x + 60 = 6(x-2)(x-5)$

Estudiamos crecimiento de la función:

- $f'(0) = 60 > 0$ luego en $(-\infty, 2)$ crece
- $f'(3) = -120 < 0$ luego en $(2,5)$ decrece
- $f'(6) = 24 > 0$ luego en $(5, +\infty)$ crece

24) Función coste: $C(x) = 3x^2 - 27x + 108$

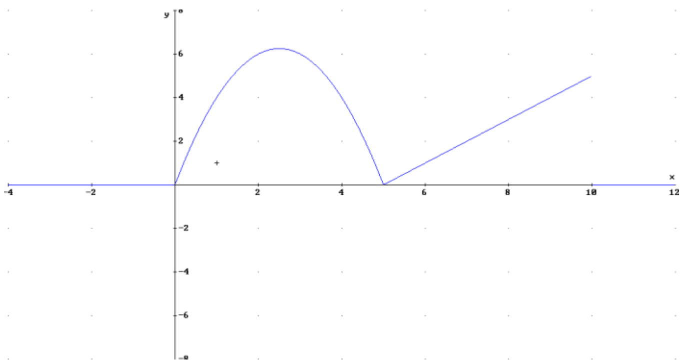
a) Se trata de minimizar la función $M(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{3x^2 - 27x + 108}{x}$

Derivando e igualando a cero: $M'(x) = \dfrac{3x^2 - 108}{x^2} = 0 \Leftarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$ (no puede ser negativo)

Derivando de nuevo: $M''(x) = \dfrac{216}{x^3} \Rightarrow M''(6) = 1 > 0$, luego $\boxed{x = 6}$ mínimo

b) Como $M''(x) = \dfrac{216}{x^3} \neq 0 \Rightarrow$ No tiene puntos de inflexión

25) Consideremos $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5x & si \quad 0 \le x < 5 \\ x - 5 & si \quad 5 \le x \le 10 \end{cases}$



Continuidad.- El único punto donde puede fallar la continuidad es $x = 5$

- $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 5} (-x^2 + 5x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 5} (x - 5) = 0$
- $f(5) = 5 - 5 = 0$. Luego $f(x)$ es continua en R

26) Sea la función: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x-1} & si \quad x\le 2\\ \dfrac{3x^2-2x}{x+2} & si \quad x>2\end{cases}$

a) Continuidad en $x=2$. Calculamos límites laterales:

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)=4 \quad ; \quad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{3x^2-2x}{x+2}\right)=\dfrac{8}{4}=2$. Como son distintos, no es continua

b) Recta tangente en $x=3$ será $y-f(3)=f'(3)(x-3)$

Derivando la función $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-3}{(x-1)^2} & si \quad x<2\\ \dfrac{3x^2+12x-4}{(x+2)^2} & si \quad x>2\end{cases}$. Así $f'(3)=\left(\dfrac{3x^2+12x-4}{(x+2)^2}\right)_{x=3}=\dfrac{59}{25}$

Como $f(3)=\dfrac{21}{5}$, la recta tangente será: $\boxed{y-\dfrac{21}{5}=\dfrac{59}{25}(x-3)}$

c) Asíntotas oblicuas.- Es claro que si $x<2$ no tiene pues $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\frac{x+2}{x-1}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+2}{x^2-x}\right)=0$

La ecuación de la asíntota es $y=mx+n$. Si $x>2$, $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\frac{3x^2-2x}{x+2}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2-2x}{x^2+2x}\right)=3$

$n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2+12x-4}{(x+2)^2}-3x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-8x}{x+2}\right)=-8$. Luego $\boxed{y=3x-8}$

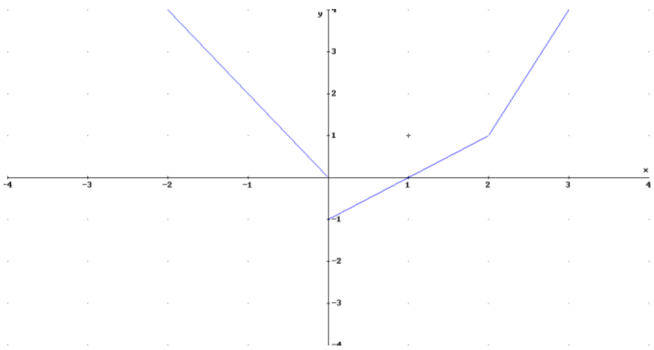
---

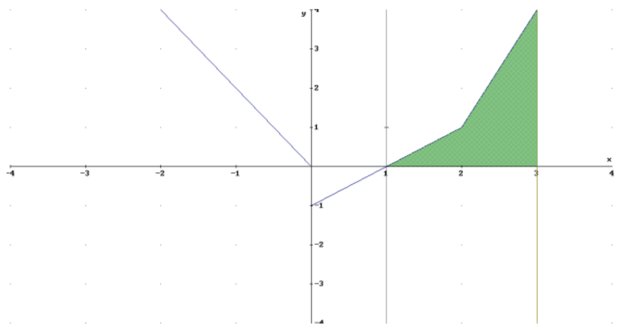
27) Sea $f(x)=\begin{cases}-2x-a & si & x\le 0\\ x-1 & si & 0<x\le 2\\ bx-5 & si & x>2\end{cases}$

a) Continuidad.- La estudiamos en los puntos de enganche, $x=0$ y $x=2$

- En $x=0$: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(-2x-a\right)=-a$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(x-1\right)=-1$. Igualando $\boxed{a=1}$
- En $x=2$: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(x-1\right)=1$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(bx-5\right)=2b-5$. Igualando $\boxed{b=3}$

b) Sustituyendo los valores $a=0$ y $b=3$, la función quedará: $f(x)=\begin{cases}-2x & si & x\le 0\\ x-1 & si & 0<x\le 2\\ 3x-5 & si & x>2\end{cases}$





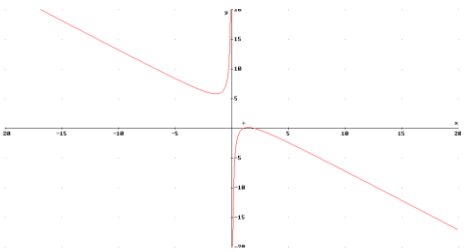
Así: $A=\int_1^2 (x-1)\,dx+\int_2^3 (3x-5)\,dx=\left[\dfrac{x^2}{2}-x\right]_1^2+\left[\dfrac{3x^2}{2}-5x\right]_2^3=\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}=\boxed{3}$

---

28) Sea la función: $f(x)=3-x-\dfrac{2}{x}$

a) <u>Máximos y mínimos</u>.- Derivando: $f'(x)=-1+\dfrac{2}{x^2}=0\Rightarrow x^2=2\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$

Derivando de nuevo: $f''(x)=-\dfrac{4}{x^3}\Rightarrow\left\langle\begin{matrix} f''(-\sqrt{2})=\sqrt{2}>0 \\ f''(\sqrt{2})=-\sqrt{2}>0\end{matrix}\right\rangle\Rightarrow$ en $\boxed{x=-\sqrt{2}}$ tiene un mínimo y en $\boxed{x=\sqrt{2}}$ un máximo.



b) $A=\int_1^2\left(3-x-\dfrac{2}{x}\right)dx==\left[3x-\dfrac{x^2}{2}-2\ln x\right]_1^2=\boxed{\dfrac{3}{2}-2\ln 2}$

---

29) La función viene definida por: $s(t)=\dfrac{340+330t-10t^2}{t+2}$

a) $s(t)=0\Rightarrow\dfrac{340+330t-10t^2}{t+2}=0\Rightarrow 340+330t-10t^2=0\Rightarrow t^2-33t-34=0\Rightarrow\left\langle\begin{matrix} t=-1 \\ t=34\end{matrix}\right.$. Como t tiene que ser positivo $\boxed{t=34}$

b) Derivando: $s'(t)=\dfrac{320-40t-10t^2}{(t+2)^2}=0\Rightarrow\left\langle\begin{matrix} t=-8 \\ t=4\end{matrix}\right.$ estudiando su monotonía:

	$(-\infty,-8)$	$(-8,4)$	$(4,\infty)$
$s'(x)$	$-$	$+$	$-$
$s(x)$	decrece	crece	decrece

Luego como t ha de ser positivo, vemos que en $\boxed{t=4}$

la función pasa de crecer a decrecer con lo que

Se trata de un máximo.

c) Asíntotas.- Verticales: Como $\lim_{t\to -2} s(t)=\lim_{t\to -2}\frac{340+330t-10t^2}{t+2}=\infty$, $\boxed{t=-2}$ es asíntota vertical.

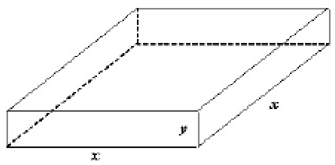
Horizontales.- $\lim_{t\to +\infty} s(t)=\lim_{t\to +\infty}\frac{340+330t-10t^2}{t+2}=\infty$, luego no tiene

Oblicuas .- $m=\lim_{t\to +\infty}\frac{\frac{340+330t-10t^2}{t+2}}{t}=\lim_{t\to +\infty}\frac{340+330t-10t^2}{t(t+2)}=-10$

$n=\lim_{t\to +\infty}\left(s(t)-mt\right)=\lim_{t\to +\infty}\left(\frac{340+330t-10t^2}{t+2}+10t\right)=350$. Luego asíntota: $\boxed{y=-10t+350}$

---

30) Sea $x=$ lado de la base ; $y=$ altura de la caja. Sabemos que $Vol=500$, es decir: $V=x^2y=500$



Se trata de minimizar el área de la caja: $S=4xy+x^2$

De la expresión del volumen: $y=\frac{500}{x^2}$, sustituyendo en el área:

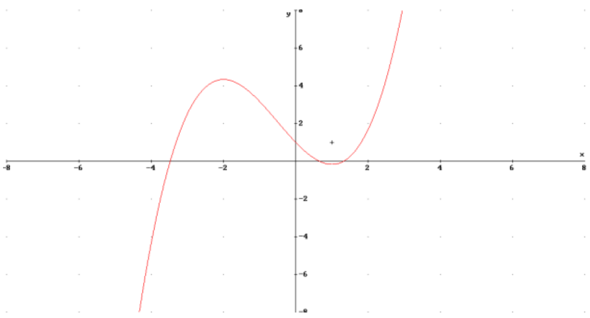
$S(x)=4x\cdot\frac{500}{x^2}+x^2=\frac{2000}{x}+x^2$. Derivando: $S'(x)=-\frac{2000}{x^2}+2x$

Igualando a cero $-\frac{2000}{x^2}+2x=0\Rightarrow x^3=1000\Rightarrow \boxed{x=10}$

Sustituyendo en la expresión de y: $y=\frac{500}{10^2}=\frac{500}{100}\Rightarrow \boxed{y=5}$

---

31) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+1$. Su dominio es R (es un polinomio)



a) Máximos y mínimos.- Derivando e igualando a cero

$$f'(x)=\frac{1}{3}\cdot 3x^2+\frac{1}{2}\cdot 2x-2=x^2+x-2=0\Rightarrow\left\langle\begin{matrix}x=-2\\ x=1\end{matrix}\right.$$

Derivando de nuevo:

$$f''(x)=2x+1\Rightarrow\left\langle\begin{matrix}f''(-2)=-3<0\\ f''(2)=3>0\end{matrix}\right.\Rightarrow \boxed{\left(-2,\frac{13}{3}\right)}\text{ máximo}$$

y $\boxed{\left(1,-\frac{1}{6}\right)}$ mínimo.

b) Puntos de inflexión: Igualando la 2ª derivada a cero:

$f''(x)=2x+1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$. Como $f'''(x=2\neq 0$

$\boxed{\left(-\frac{1}{2},\frac{25}{12}\right)}$ es punto de inflexión.

---

32) Sean $f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=-x^2+c$

a) Si se cortan en $(-2,3)\Rightarrow\left\langle\begin{matrix} f(-2)=3\Rightarrow 4-2a+b=-3 \\ g(-2)=3\Rightarrow -4+c=-3\end{matrix}\right.\Rightarrow b-2a=-7$ y $\boxed{c=1}$

Si se cortan en $(1,0)\Rightarrow\left\langle\begin{matrix} f(1)=0\Rightarrow 1+a+b=0 \\ g(1)=0\Rightarrow -1+c=0\end{matrix}\right.\Rightarrow a+b=-1$. Así se forma el sistema de ecuaciones:

$\left.\begin{cases} b-2a=-7 \\ a+b=-1\end{cases}\right\}\Rightarrow\boxed{a=2}$ y $\boxed{b=-3}$

b) Tangente a $g(x)$ en $(-2,-3)$: $y+3=g'(-2)(x+2)$

Derivando: $g'(x)=-2x\Rightarrow g'(-2)=4\Rightarrow$ Sustituyendo: $\boxed{y+3=4(x+2)}$

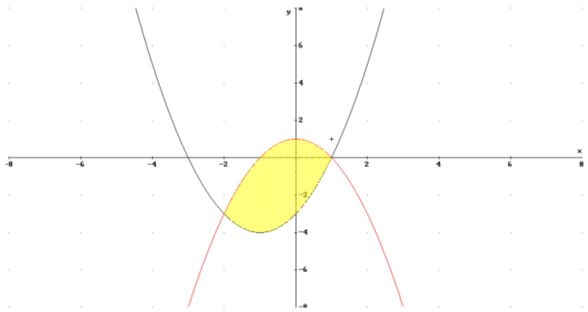
c) Area entre $f(x)=x^2+2x-3$ y $g(x)=-x^2+1$

Sabemos por el apartado a) que se cortan en $(-2,3)$ y $(1,0)$

Así:

$$A=\int_{-2}^{1}(g(x)-f(x))\,dx=\int_{-2}^{1}\left(-x^2+1-x^2-2x+3\right)dx=$$

$$=\int_{-2}^{1}\left(-2x^2-2x+4\right)dx==\left[-\frac{2x^3}{3}-x^2+4x\right]_{-2}^{1}=\boxed{9}$$



---

33) Sea la función: $f(x)=2x^2-\frac{1}{3}x^3$. Al ser un polinomio su dominio es R

a) Crecimiento y decrecimiento: Derivando e igualando a cero: $f'(x)=4x-x^2=0\Rightarrow\left\langle\begin{matrix}x=0\\x=4\end{matrix}\right.$

	$(-\infty,0)$	$(0,4)$	$(4,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Decrec	Creciente	Derec

b) Del apartado anterior se deduce que $\boxed{(0,0)}$ es un mínimo y $\boxed{\left(4,\frac{32}{3}\right)}$ máximo

c) El valor de la pendiente es $f'(x)=4x-x^2$, para maximizar derivamos: $f''(x)=4-2x=0\Rightarrow$ $x=2$. Como $f'''(x)=-2<0\Rightarrow\boxed{x=2}$ es máximo .

---

34) Sea la curva $y=x^2-4x-5$

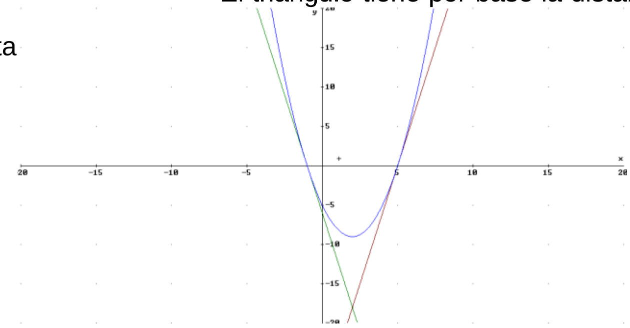
a) Al ser una parábola, el mínimo coincide con el vértice. Derivando: $y'=2x-4=0\Rightarrow x=2$

Sustituyendo en la función el mínimo será $\boxed{(2,-9)}$

b) Cortes curva con eje OX: $\left\{\begin{array}{l} y=x^2-4x-5 \\ y=0 \end{array}\right\}\Rightarrow (5,0)$ y $(-1,0)$

Rectas tangentes en estos puntos: $\left\langle\begin{array}{l} y-0=6(x-5) \\ y-0=-6(x+1) \end{array}\right.\Rightarrow\left\langle\begin{array}{l} y=6(x-5) \\ y=-6(x+1) \end{array}\right\rangle$ Para hallar el punto de corte entre ellas resolvemos el sistema de ecuaciones: $y=6(x-5)=-6(x+1)\Rightarrow x=2$. Con lo que dicho punto será $(2,-18)$. Construimos el triángulo de vértices: $(2,-18)$, $(-1,0)$ y $(5,0)$

El triángulo tiene por base la distancia entre $(-1,0)$ y $(5,0)$ es decir, $b=6$. La altura será la dista



Luego el área del triángulo será:

$A=\dfrac{6\cdot 18}{2}=\boxed{54}$

---

35) Se la curva $y=x^3-4x$

a) <u>Cortes con los ejes</u>.

- <u>Con el eje OX</u>.- $y=0\Rightarrow x^3-4x=0\Rightarrow x(x^2-4)=0\Rightarrow\left\langle\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \\ x=2 \end{array}\right\rangle\Rightarrow\boxed{(0,0)}$, $\boxed{(-2,0)}$ y $\boxed{(2,0)}$

- <u>Con el eje OY</u>.- $x=0\Rightarrow y=0\Rightarrow(0,0)$

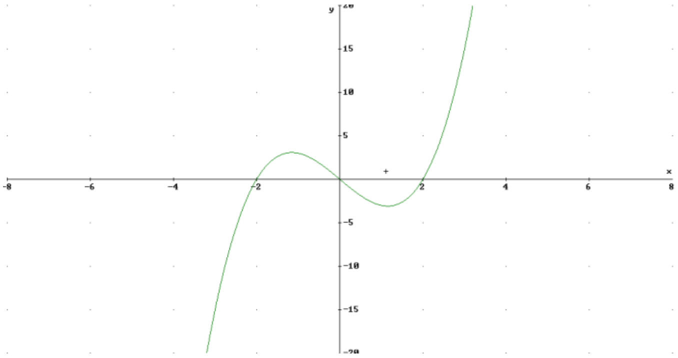
<u>Máximos y mínimos</u>.- Derivando: $y'=3x^2-4=0\Rightarrow x=\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

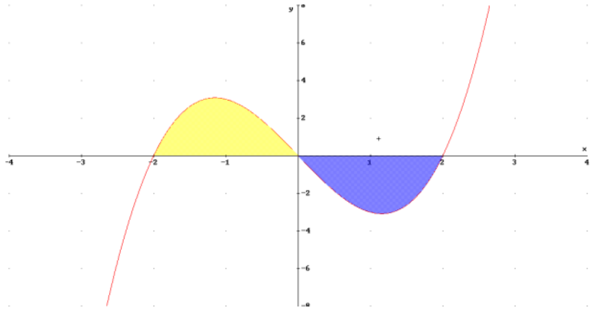
	$\left(-\infty,-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\infty\right)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	crece	decrece	crece

Luego $\boxed{\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\dfrac{16\sqrt{3}}{3}\right)}$ en tiene un máximo

y en $\boxed{\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},-\dfrac{16\sqrt{3}}{3}\right)}$ un mínimo

b) Representación gráfica





c) $A=\int_{-2}^{0}(x^3-4x)\,dx-\int_{0}^{2}(x^3-4x)\,dx=$ por simetría $=-2\int_{0}^{2}(x^3-4x)\,dx\ =-2\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_0^2=-2(-4)=\boxed{8}$

---

36) Sea $f(x)=\frac{3x^2-ax}{x+2}$, su dominio es $R-\{-2\}$

a) Si tiene un mínimo relativo en $x=2\Rightarrow f'(2)=0$ y $f''(2)>0$

Derivando: $f'(x)=\frac{3x^2+12x-2a}{(x+2)^2}$. Si $f'(2)=0\Rightarrow\frac{12+24-2a}{16}=0\Rightarrow 36-2a=0\Rightarrow\boxed{a=18}$

Comprobando: $f''(x)=\frac{4(a+6)}{(x+2)^3}=$ si $(a=18)=\ f''(x)=\frac{96}{(x+2)^3}\Rightarrow f''(2)=\frac{96}{64}>0$, luego mínimo

b) Si $a=3$, $f(x)=\frac{3x^2-3x}{x+2}$, calculamos asíntotas:

- Verticales.- $\boxed{x=-2}$, pues $\lim_{x\to-2} f(x)=\lim_{x\to-2}\left(\frac{3x^2-3x}{x+2}\right)=\frac{18}{0}=\pm\infty$
- Horizontales.- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-3x}{x+2}=\infty$, luego no tiene
- Oblicuas.- $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-3x}{x(x+2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-3x}{x^2+2x}=3$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-3x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-3x}{x+2}-3x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-3x-3x^2-6x}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-9x}{x+2}\right)=-9$$

luego asíntota oblicua $\boxed{y=3x-9}$

---

37) a) $\int_0^3\frac{1}{x+1}\,dx=a\Rightarrow=\left[\ln|x+1|\right]_0^3=a\Rightarrow\ln 4-\ln 1=a\Rightarrow\boxed{a=\ln 4}$

b) $\int_0^a\frac{1}{x+1}\,dx=3\Rightarrow\left[\ln|x+1|\right]_0^a=3\Rightarrow\ln|a+1|-\ln 1=3\Rightarrow\ln|a+1|=3\Rightarrow a+1=e^3\Rightarrow\boxed{a=e^3-1}$

c) $\int_0^3 \frac{1}{x+a}\,dx = 5 \Rightarrow \Rightarrow \left[\ln|x+a|\right]_0^3 = 5 \Rightarrow \ln|3+a| - \ln a = 5 \Rightarrow \ln\left|\frac{3+a}{a}\right| = 5 \Rightarrow \frac{3+a}{a} = e^5 \Rightarrow 3+a = ae^5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 = a(e^5 - 1) \Rightarrow \boxed{a = \frac{3}{e^5 - 1}}$

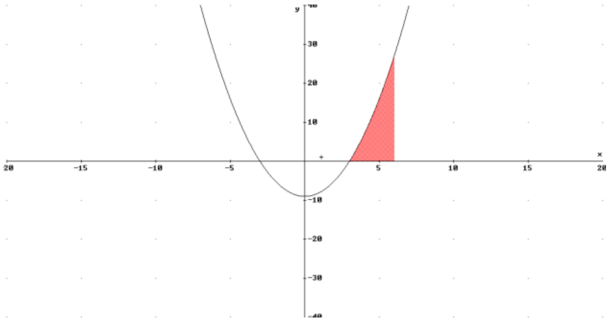
---

38) Sean las funciones $f(x) = x^2 - 9$, $g(x) = x^2 - x - 6$.

a) $\lim_{x\to 3} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+3}{x+2} = \boxed{\frac{6}{5}}$

b) Extremos de $g(x)$.- Derivando: $g'(x) = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$. Como $g''(x) = 2 > 0 \Rightarrow \boxed{\left(\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)}$ es mínimo

c) Area $A = \int_3^6 \left(x^2 - 9\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 9x\right]_3^6 = \left(\frac{216}{3} - 54\right) - \left(\frac{27}{3} - 9\right) = \boxed{36}$



---

39) Sea $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$. Su dominio es $R - \{\pm 1\}$

a) Crecimiento y Decrecimiento.- Derivando: $f'(x) = \frac{x^2+1}{(1-x^2)} > 0$, luego la función es siempre creciente en su dominio. No tiene extremos

b) Asíntotas.- Verticales.- Como $\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1}\left(\frac{x}{1-x^2}\right) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{1-x^2}\right) = \pm\infty$, las rectas $\boxed{x = -1}$, $\boxed{x = 1}$ lo son.

Verticales.- $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{1-x^2} = 0 \Rightarrow$ lo es la recta $\boxed{y = 0}$

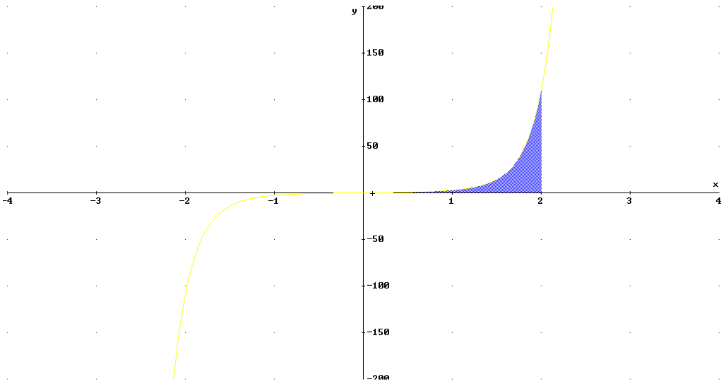
c) Recta tangente en $x = 0$. – Se trata de la recta $y - f(0) = f'(0)(x-0)$. Como $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$, se tiene: $\boxed{y = x}$

40) Sea $f(x)=x\cdot e^{x^2}$ su dominio es R

a) Recta tangente en $x=1$. – Es la recta $y-f(1)=f'(1)(x-1)$.

Derivando: Como $f'(x)=e^{x^2}+2x^2e^{x^2}=(2x+1)e^{x^2}\Rightarrow f'(1)=3e$. Como $f(1)=e$, se tiene:

$\boxed{y-e=3e\,(x-1)}$



b) Area

$$A=\int_0^2\left(xe^{x^2}\right)dx=\left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^2=\boxed{\frac{e^4-1}{2}}$$

---

41) Sea $f(x)=\dfrac{-x^3+1}{2x^2+2x-12}$

a) Dominio.- $2x^2+2x-12=0\Rightarrow x^2+x-6=0\Rightarrow\left\langle\begin{array}{l}x=2\\x=-3\end{array}\right.$, luego $\boxed{R-\{-3,2\}}$

b) Continuidad.- Estudiamos los puntos que no están en el dominio

- En $x=-3$.- $\lim\limits_{x\to-3}f(x)=\lim\limits_{x\to-3}\left(\dfrac{-x^3+1}{2x^2+2x-12}\right)=\pm\infty$
- En $x=2$.- $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{-x^3+1}{2x^2+2x-12}\right)=\pm\infty$

Ambas discontinuidades no evitables de salto infinito

c) Asíntotas.- Por el apartado b) hay dos verticales $\boxed{x=-3}$, $\boxed{x=2}$

Horizontales.- Como $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-x^3+1}{2x^2+2x-12}\right)=\pm\infty$, no tiene

Oblicuas.- $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{-x^3+1}{2x^2+2x-12}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-x^3+1}{2x^3+2x^2-12x}\right)=-\dfrac{1}{2}$

$n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-\dfrac{x}{2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-x^3+1}{2x^2+2x-12}-\dfrac{x}{2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-6x+1}{2x^2+2x-12}\right)=\dfrac{1}{2}$, luego asíntota oblicua $\boxed{y=\dfrac{1-x}{2}}$

---

42) Recordando que $|x|=\begin{cases}-x & si\quad x<0\\ x & si\quad x\geq 0\end{cases}$, $\int_{-1}^{1}\left(|x|+x+1\right)dx=\int_{-1}^{0}\left(-x+x+1\right)dx+\int_0^1\left(x+x+1\right)dx=$

$$=\int_{-1}^{0}dx+\int_0^1(2x+1)\,dx=[x]_{-1}^{0}+\left[x^2+x\right]_0^1=1+2=\boxed{3}$$

43) Sea $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^2-1}}$

a) Dominio.- $D=\left\{\dfrac{x^2-4}{x^2-1}\geq 0 \mid x\in R\right\}$, como $\dfrac{x^2-4}{x^2-1}=\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x+1)(x-1)}$, se tiene:

	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x^2-4}{x^2-1}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

luego: $\boxed{D=(-\infty,-2]\cup(-1,1)\cup[2,+\infty)}$

b) Asíntotas.- Verticales:

En $\boxed{x=-1}$.- $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\left(\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^2-1}}\right)=+\infty$

En $\boxed{x=1}$.- $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^2-1}}\right)=+\infty$

Horizontales.- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^2-1}}\right)=\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-4}{x^2-1}\right)}=\sqrt{1}=1\Rightarrow \boxed{y=1}$

---

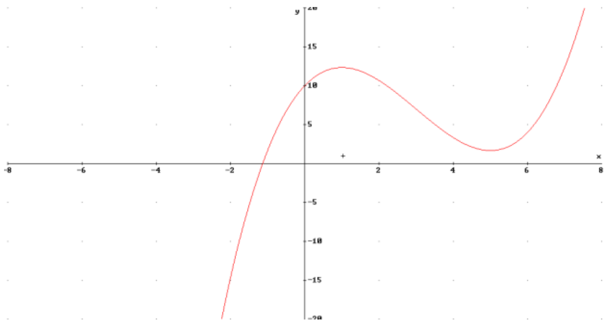
44) $f(x)=\dfrac{x^3}{a}-ax^2+5x+10$. Dominio R (es un polinomio)

a) Si tiene un máximo en $x=1$, $f'(1)=0$ y $f''(1)<0$

Derivando: $f'(x)=\dfrac{3x^2}{a}-2ax+5\Rightarrow f'(1)=0\Rightarrow \dfrac{3}{a}-2a+5=0\Rightarrow 3-2a^2+5a=0\Rightarrow \boxed{\left\langle \begin{array}{l} a=-1/2 \\ a=3 \end{array}\right.}$

b) Si $a=3\Rightarrow f(x)=\dfrac{x^3}{3}-3x^2+5x+10\Rightarrow f'(x)=x^2-6x+5=0\Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \end{array}\right.$

Derivando de nuevo: $f''(x)=2x-6\Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} f''(1)=-4<0 \\ f''(5)=4>0 \end{array}\right.$. Luego $\boxed{\left(1,\dfrac{37}{3}\right)}$ máximo y $\boxed{\left(5,\dfrac{5}{3}\right)}$ mínimo



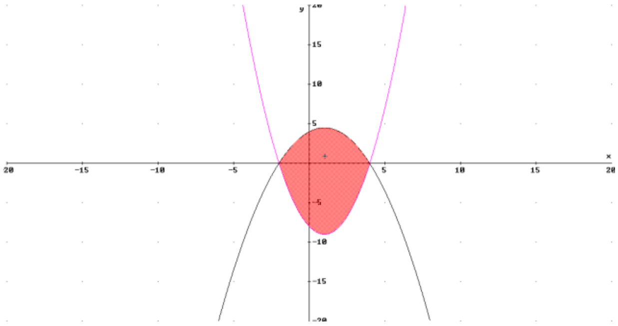
---

45) Consideremos $f(x)=x^2-2x-8$; $g(x)=-\dfrac{x^2}{2}+x+4$

a) $\lim_{x\to 4}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 4}\dfrac{x^2-2x-8}{-\dfrac{x^2}{2}+x+4}=\dfrac{0}{0}=\lim_{x\to 4}\dfrac{x^2-2x-8}{\dfrac{-x^2+2x+8}{2}}=\lim_{x\to 4}\dfrac{2(x^2-2x-8)}{-x^2+2x+8}=\boxed{-2}$

b) Calculamos puntos de corte entre ambas $\left\{\begin{array}{l} y=x^2-2x-8 \\ y=-\dfrac{x^2}{2}+x+4 \end{array}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-2x-8=-\dfrac{x^2}{2}+x+4\Rightarrow\left\langle\begin{array}{l} x=-2 \\ x=4 \end{array}\right.$



$A=\displaystyle\int_{-2}^{4}\left(-\frac{x^2}{2}+x+4-(x^2-2x-8)\right)dx=$

$=\displaystyle\int_{-2}^{4}\left(\frac{-3x^2+6x+24}{2}\right)dx=\left[\frac{-x^3+3x^2+24x}{2}\right]_{-2}^{4}=$

$=40-(-14)=\boxed{54}$

---

46) Si la función beneficio es $B(x)=\dfrac{-x^2+9x-16}{x}$. Dominio $R-\{0\}$

Derivando: $B'(x)=\dfrac{16-x^2}{x^2}=0\Rightarrow 16-x^2=0\Rightarrow x=4$ (la negativa no vale)

Derivando de nuevo: $B''(x)=\dfrac{-32}{x^3}=0\Rightarrow B''(4)=-\dfrac{1}{2}<0\Rightarrow\boxed{x=4}$

Beneficio máximo $B(4)=\boxed{1000€}$

---

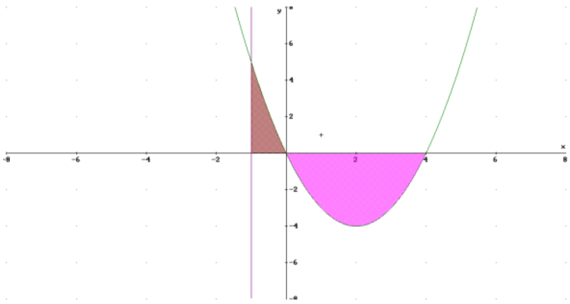
47) a) Punto de corte de $f(x)=e^{2-x}$ con OX: $\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=e^{2-x} \end{array}\right\}\Rightarrow P(0,e^2)$

Derivando $f'(x)=-e^{2-x}\Rightarrow f'(0)=-e^2$

Recta tangente en dicho punto: $\boxed{y-e^2=-e^2x}$.

b) Puntos de corte de $f(x)=x^2-4x$, con OX:

$x^2-4x=0\Rightarrow x(x-4)=0\Rightarrow\left\langle\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$



$A=\displaystyle\int_{-1}^{0}\left(x^2-4x\right)dx-\int_{0}^{4}\left(x^2-4x\right)dx=$

$=\left[\dfrac{x^3}{3}-2x^2\right]_{-1}^{0}-\left[\dfrac{x^3}{3}-2x^2\right]_{0}^{4}=-\left(\dfrac{-1}{3}-2\right)-\left(\dfrac{64}{3}-32\right)==\dfrac{1}{3}+2-\dfrac{64}{3}+32=34-\dfrac{63}{3}=34-21=\boxed{13}$

---

48) Sea la curva $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$. Dominio R, pues $x^2+1\neq 0$

a) Derivando: $y'=\dfrac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}\Rightarrow y'(1)=1$, como $y(1)=\dfrac{1}{2}$, la recta tangente será: $y-\dfrac{1}{2}=x-1\Rightarrow \boxed{2y-2x+1=0}$

b) Asíntotas.- Verticales.- Por el apartado a) hay no tiene

Horizontales.- Como $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}\right)=\pm\infty$, no tiene

Oblicuas.- $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x^3}{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^3+x^2}\right)=1$. Como la asíntota es $y=mx+n$

$n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-x}{x^2+1}\right)=0$, luego asíntota oblicua $\boxed{y=x}$

---

49) a) Asíntotas de $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-9}$

- Verticales.- Como $\lim\limits_{x\to-3} f(x)=\lim\limits_{x\to-3}\left(\dfrac{x^2}{x^2-9}\right)=\pm\infty$, y $\lim\limits_{x\to3} f(x)=\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{x^2}{x^2-9}\right)=\pm\infty$

  Son asíntotas las rectas $\boxed{x=-3}$ y $\boxed{x=3}$

- Horizontales.- Como $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2-9}\right)=1\Rightarrow \boxed{y=1}$

b) Extremos relativos.- Derivando: $f'(x)=\dfrac{-18x}{(x^2-9)^2}=0\Rightarrow x=0$.

Estudiando monotonía:

	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente	decreciente

Luego el $\boxed{(0,0)}$ es un máximo

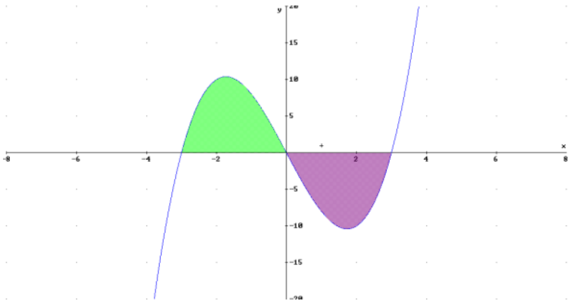
---

50) Sea $f(x)=x^3-9x$, su dominio es R

a) Derivando: $f'(x)=3x^2-9=0\Rightarrow x^2-3=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$

Derivando de nuevo: $f''(x)=6x\Rightarrow\left\langle\begin{array}{l} f''(-\sqrt{3})=-6\sqrt{3}<0 \\ f''(\sqrt{3})=6\sqrt{3}>0\end{array}\right.$, luego $\boxed{\left(-\sqrt{3},6\sqrt{3}\right)}$ máximo y $\boxed{\left(\sqrt{3},-6\sqrt{3}\right)}$ mínimo

b) Si $f(x)=x^3-9x=0 \Rightarrow x(x^2-9)=0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x=0 \\ x=-3. \\ x=3 \end{array}\right.$



Luego la curva corta al eje OX en los puntos $(0,0)$, $(-3,0)$ y $(3,0)$. Así:

$$A=\int_{-3}^{0}\left(x^3-9x\right)dx-\int_{0}^{3}\left(x^3-9x\right)dx=\text{por simetría}=$$

$$=-2\int_{0}^{3}\left(x^3-9x\right)dx= =-2\cdot\left[\frac{x^4}{4}-\frac{9x^2}{2}\right]_0^3=-2\cdot\left(\frac{81}{4}-\frac{81}{2}\right)=-2\cdot\left(-\frac{81}{4}\right)=\boxed{\frac{81}{2}}$$

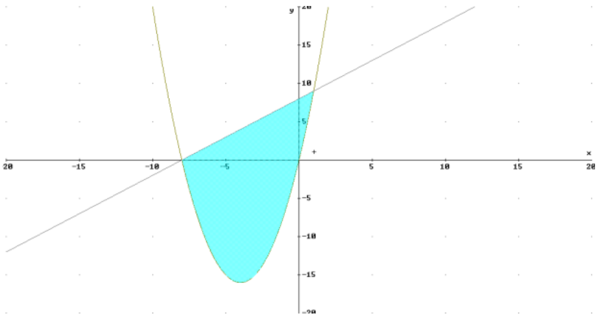
---

51) a) Pendiente de la recta tangente a la curva en $(a, f(a))$ es $f'(a)$. Como esta es paralela a la recta $y=2x$, (que tiene pendiente 2), se tiene que $f'(a)=2$

Derivando en la curva: $f'(x)=2x+8 \Rightarrow f'(a)=2a+8$, luego $2a+8=2 \Rightarrow a=-3$. Sustituyendo en la curva: $f(-3)=-15$. Luego el punto pedido es: $\boxed{(-3,-15)}$

b) Calculamos puntos de corte de la recta y la curva:

$$\left.\begin{cases} y=x^2+8x \\ y=x+8 \end{cases}\right\} \Rightarrow x^2+8x=x+8 \Rightarrow x^2+7x-8=0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x=-8 \\ x=1 \end{array}\right.,$$



luego se cortan en $(-8,0)$ y $(1,9)$.

$$A=\int_{-8}^{1}\left(x+8-x^2-8x\right)dx=\int_{-8}^{1}\left(-x^2-7x+8\right)dx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{7x^2}{2}+8x\right]_{-8}^{1}=\left(-\frac{1}{3}-\frac{7}{2}+8\right)-\cdot\left(\frac{512}{3}-\frac{448}{2}-64\right)=\frac{25}{6}-\left(-\frac{352}{3}\right)=\boxed{\frac{243}{2}}$$

---

52) a) Asíntotas de $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x^2-4}$

- <u>Verticales</u>.- Como $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x^2-16}{x^2-4}\right)=\pm\infty$, y $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-16}{x^2-4}\right)=\pm\infty$

  Son asíntotas las rectas $\boxed{x=-2}$ y $\boxed{x=2}$

- <u>Horizontales</u>.- Como $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2-16}{x^2-4}\right)=1 \Rightarrow \boxed{y=1}$

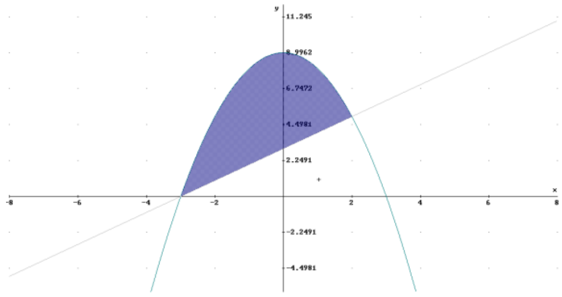
b) Descomponiendo en factores $f(x)=\dfrac{(x-4)(x+4)}{(x-2)(x+2)}$, obtenemos:

	$(-\infty,-4)$	$(-4,-2)$	$(-2,2)$	$(2,4)$	$(4,\infty)$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Es decir, en $\boxed{(-\infty,-4)\cup(-2,2)\cup(4,+\infty)\ es\ positiva}$ y en $\boxed{(-4,-2)\cup(2,4)\ es\ negativa}$

---

53) Calculamos los puntos de corte de la recta y la curva:



$$\left\{\begin{matrix} y=9-x^2 \\ y=x+3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 9-x^2=3+x \Rightarrow x^2+x-6=0 \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} x=-3 \\ x=2 \end{matrix}\right. ,$$

luego se cortan en $(-3,0)$ y $(2,5)$.

$$A=\int_{-3}^{2}\left(9-x^2-x-3\right)dx=\int_{-3}^{2}\left(-x^2-x+6\right)dx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+6x\right]_{-3}^{2}=\left(-\frac{8}{3}-\frac{4}{2}+12\right)-\cdot\left(\frac{27}{3}-\frac{9}{2}-18\right)=\frac{22}{3}-\left(-\frac{27}{2}\right)=\boxed{\frac{125}{6}}$$

---

54) a) Asíntotas de $f(x)=\dfrac{(x-3)^2}{x+3}$

- <u>Verticales</u>.- Como $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{(x-3)^2}{x+3}\right)=\pm\infty$, es asíntota la recta $\boxed{x=-3}$

- <u>Horizontales</u>.- No tiene pues $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{(x-3)^2}{x+3}\right)=+\infty$

- <u>Oblicuas</u>.- $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{(x-3)^2}{x+3}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{(x-3)^2}{x^2+3x}\right)=1$. Como la asíntota es $y=mx+n$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x-3)^2}{x+3}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-9x+9}{x+3}\right)=-9$$, luego asíntota oblicua $\boxed{y=x-9}$

b) <u>Crecimiento y extremos</u>.- Derivando e igualando a cero: $f'(x)=\dfrac{x^2+6x-27}{(x+3)^2}=0\Rightarrow \left\langle \begin{matrix} x=-9 \\ x=3 \end{matrix}\right.$

	$(-\infty,-9)$	$(-9,3)$	$(3,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

Luego $\boxed{(-9,-24)}$ máximo y $\boxed{(3,0)}$ mínimo

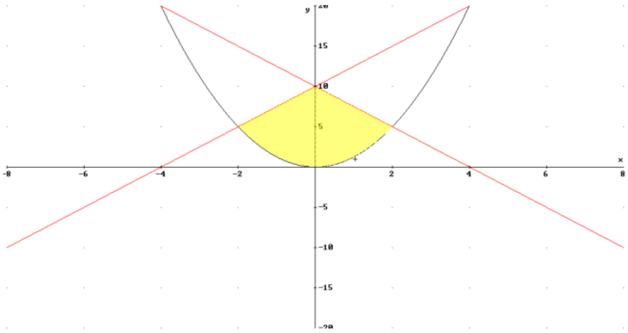
55) Sean las funciones $f(x)=\frac{5}{4}x^2$, $g(x)=\frac{1}{2}(5x+20)$, $h(x)=\frac{1}{2}(-5x+20)$

Hallamos el punto de corte entre ellas:

$$\left\{\begin{array}{l} f(x)=\frac{5}{4}x^2 \\ g(x)=\frac{1}{2}(5x+20)\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}(4,20)\\(-2,5)\end{array}\right\} \; ; \; \left\{\begin{array}{l} f(x)=\frac{5}{4}x^2 \\ h(x)=\frac{1}{2}(-5x+20)\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}(-4,20)\\(2,5)\end{array}\right\} \; ; \; \left\{\begin{array}{l} h(x)=\frac{1}{2}(-5x+20) \\ g(x)=\frac{1}{2}(5x+20)\end{array}\right\} \Rightarrow (0,0)$$

El recinto que delimitan es el de la derecha

Por simetría del dibujo:



$$A=2\int_0^2 \left(h(x)-f(x)\right)dx=$$

$$=2\int_0^2 \left(-\frac{5(x^2+2x-8)}{4}\right)dx=$$

$$=2\left[-\frac{-5x^3-15x^2+12x}{12}\right]_0^2=2\cdot\frac{35}{3}=\boxed{\frac{70}{3}}$$

---

56) a) Dominio de $f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}$. Igualando el denominador a cero: $x^2-3x+2=0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$, luego

$$\boxed{D=R-\{1,2\}}$$

b) Continuidad.- En $x=1$, $f(1)$ no existe.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}\right)=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-2}\right)=-1,$$ luego discontinuidad evitable

En $x=2$, $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}\right)=\frac{2}{0}=\pm\infty$, luego discontinuidad no evitable de salto infinito

c) Asíntotas.- Verticales.- Por el apartado anterior lo es $\boxed{x=2}$

Horizontales.- $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}\right)=1 \Rightarrow \boxed{y=1}$

---

57) Sea $f(x)=ax^3+bx^2+c$

a) Si pasa por $(0,0) \Rightarrow f(0)=0 \Rightarrow \boxed{c=0}$

Derivando: $f'(x)=3ax^2+2bx$, como $(1,2)$ es mínimo: $f'(1)=0 \Rightarrow 3a+2b=0$

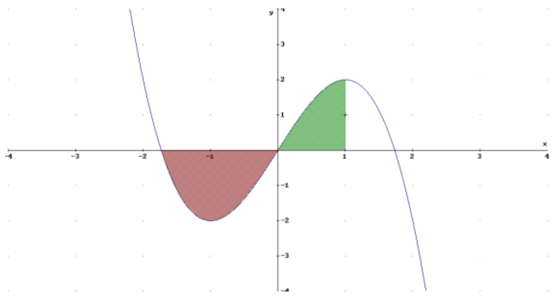
Como la curva pasa por $(1,2)$ $f(1)=2 \Rightarrow a+b=2$, teniendo en cuenta la ecuación anterior se obtiene el sistema: $\left.\begin{cases} 3a+2b=0 \\ a+b=2 \end{cases}\right\} \Rightarrow \boxed{a=-4}$ y $\boxed{b=6}$

b) Sea $f(x)=-x^3+3x$, calculamos corte con eje OX: $-x^3+3x=0 \Rightarrow x(-x^2+3)=0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x=0 \\ x=-\sqrt{3} \\ x=\sqrt{3} \end{array} \right.$

$$A=-\int_{-\sqrt{3}}^{0}\left(-x^3+3x\right)dx+\int_{0}^{1}\left(-x^3+3x\right)dx=$$

$$=-\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}\right]_{-\sqrt{3}}^{0}+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{1}=$$

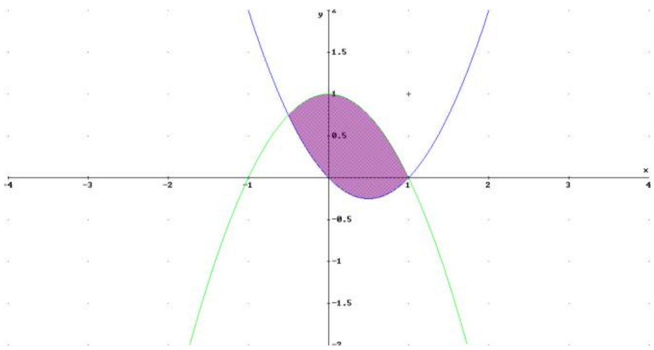
$$=-\left(-\frac{9}{4}\right)+\frac{5}{4}=\frac{14}{4}=\boxed{\frac{7}{2}}$$



58) Calculamos los puntos de corte entre las dos curvas:

$\left.\begin{cases} y=x^2-x \\ y=1-x^2 \end{cases}\right\} \Rightarrow x^2-x=1-x^2 \Rightarrow 2x^2-x-1=0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x=-1/2 \\ x=1 \end{array} \right.$, luego se cortan en $(1,0)$ y $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$.

$$A=\int_{-1/2}^{1}\left(1-x^2-x^2+x\right)dx=\int_{-1/2}^{1}\left(1-2x^2+x\right)dx==\left[x-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{-1/2}^{1}=\frac{5}{6}-\left(-\frac{7}{24}\right)=\boxed{\frac{9}{8}}$$



59) a) Asíntotas de $f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x}$, $x\neq 0$

- Verticales.- Como $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+x+2}{x}\right)=\dfrac{2}{0}=\pm\infty$, es asíntota la recta $\boxed{x=0}$ (eje OY)

- Horizontales.- No tiene pues $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x+2}{x}\right)=+\infty$

- Oblicuas.- $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+x+2}{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+2}{x^2}\right)=1$. Como la asíntota es $y=mx+n$

$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+2}{x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)=1$, luego asíntota oblicua $\boxed{y=x+1}$

b) Crecimiento y extremos.- Derivando e igualando a cero: $f'(x)=\frac{x^2-2}{x^2}=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$

	$(-\infty,-\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$	$(\sqrt{2},\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

Luego crece en $\boxed{(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)}$ y decrece en $\boxed{(-\sqrt{2},0)\cup(0,\sqrt{2})}$

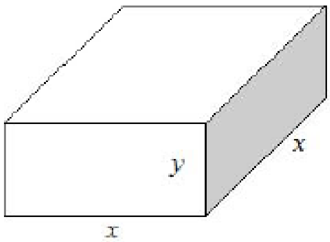
Además en $\boxed{x=-\sqrt{2}}$ es máximo y en $\boxed{x=\sqrt{2}}$ un mínimo

c) $\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2\frac{x^2+x+2}{x}\,dx=\int_1^2\left(x+1+\frac{2}{x}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}+x+2\ln x\right]_1^2=(2+2+2\ln 2)-\left(\frac{1}{2}+1\right)=$

$=\boxed{\frac{5}{2}+2\ln 2}$

---

60) Sea $x=$longitud base e $y=$altura caja



Sabemos el volumen de la caja: $V=500\Rightarrow x^2y=500\Rightarrow y=\frac{500}{x^2}$ (*)

Debemos minimizar la superficie total de la caja: $S=x^2+4xy$

Sustituyendo (*) : $S(x)=x^2+4x\cdot\frac{500}{x^2}=x^2+\frac{2000}{x}$.

Derivando e igualando a cero: $S'(x)=2x-\frac{2000}{x^2}=0\Rightarrow 2x^3=2000\Rightarrow x=10$

Derivando de nuevo: $S''(x)=2+\frac{4000}{x^3}\Rightarrow S''(10)=6>0$, luego se trata de un mínimo

Calculando el valor de $y=\frac{500}{x^2}=\frac{500}{100}=5$. Luego dimensiones: $\boxed{10\,dm\,de\,base}$ y $\boxed{5\,dm\,de\,altura}$

---

61) a) Asíntotas de $f(x)=\frac{x^2+2}{x^2-4}$

- Verticales.- Como $\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2}\left(\frac{x^2+2}{x^2-4}\right) = \frac{6}{0} = \pm\infty$, $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+2}{x^2-4}\right) = \frac{6}{0} = \pm\infty$

  Son asíntotas las rectas: $\boxed{x=-2}$ y $\boxed{x=2}$

- Horizontales.- $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2-4}\right) = 1 \Rightarrow \boxed{y=1}$

- Oblicuas.- No tiene, pues tiene horizontales

b) Crecimiento y extremos.- Derivando e igualando a cero: $f'(x) = \frac{-12x}{(x^2-4)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$

	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘

En $\boxed{(-\infty,-2)\cup(-2,0)}$ es creciente, y en $\boxed{(0,2)\cup(2,+\infty)}$ decrece. Además en $\boxed{\left(0,-\frac{1}{2}\right)}$ hay un máximo

c) $\int_3^5 (x^2-4)\, f(x)\, dx = \int_3^5 (x^2-4)\cdot\frac{x^2+2}{x^2-4}\, dx = \int_3^5 (x^2+2)\, dx = \left[\frac{x^3}{3}+2x\right]_3^5 = \left(\frac{125}{3}+10\right) - \left(\frac{27}{3}+6\right) = \boxed{\frac{110}{3}}$

---

62) El dominio de $f(x) = (x^2-1)^2$ es R

a) Extremos relativos.- Derivando e igualando a cero: $f'(x) = 2(x^2-1)2x = 4x(x^2-1) = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Decreciente	Creciente	Decreciente	Creciente

Luego $\boxed{(-1,0)}$ y $\boxed{(1,0)}$ mínimos

Y $\boxed{(0,1)}$ es máximo

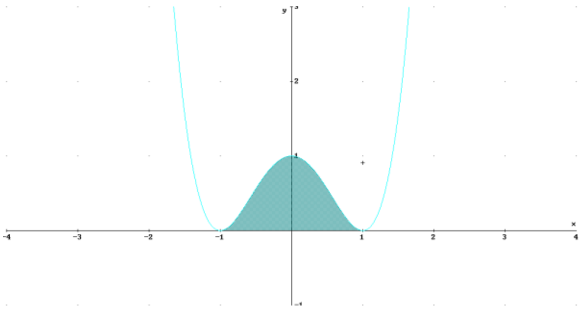
b) Recta tangente en $x=3$. Por a) $f'(x) = 4x(x^2-1) \Rightarrow f'(3) = 96$, como $f(3) = 64$, la recta tangente será:

$y - 64 = 96(x-3) \Rightarrow \boxed{96x - y - 224 = 0}$

c) La curva corta al eje OX en los puntos $(-1,0)$ y $(1,0)$

$A = \int_{-1}^{1} (x^2-1)^2\, dx =$ por simetría del recinto =

$= 2\int_0^1 (x^2-1)^2\, dx = = 2\int_0^1 (x^4-2x^2+1)\, dx =$



$$= 2 \cdot \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x \right]_0^1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 \right) = 2 \cdot \frac{8}{15} = \boxed{\frac{16}{15}}$$

---

63) a) Sea la función: $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2 - x - a}$. Asíntotas verticales: $x^2 - x - a = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$

- Caso 1.- Si $1 + 4a > 0 \Rightarrow a > -\dfrac{1}{4}$ existen dos asíntotas verticales
- Caso 2.- Si $1 + 4a = 0 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{4}$ existe una asíntota vertical
- Caso 3.- Si $1 + 4a < 0 \Rightarrow a < -\dfrac{1}{4}$ no existen asíntotas verticales

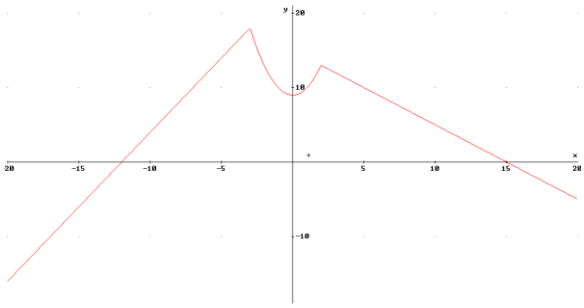
b) Sea $a = -1 \Rightarrow f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2 - x + 1}$. Si $\displaystyle\int_0^b f(x)\,dx = 0 \Rightarrow \int_0^b \left(\frac{2x-1}{x^2 - x + 1} \right) dx = 0 \Rightarrow \left[\ln(x^2 - x + 1) \right]_0^b = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ln(b^2 - b + 1) - \ln 1 = 0 \Rightarrow \ln(b^2 - b + 1) = 0 \Rightarrow b^2 - b + 1 = 1 \Rightarrow b^2 - b = 0 \Rightarrow b(b-1) = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} b = 0 \\ b = 1 \end{cases}}$$

---

64) Consideremos $f(x) = \begin{cases} 2x + 24 & si \quad x \le -3 \\ x^2 + 9 & si \quad -3 < x \le 2 \\ -x + 15 & si \quad x > 2 \end{cases}$

a) Representación gráfica



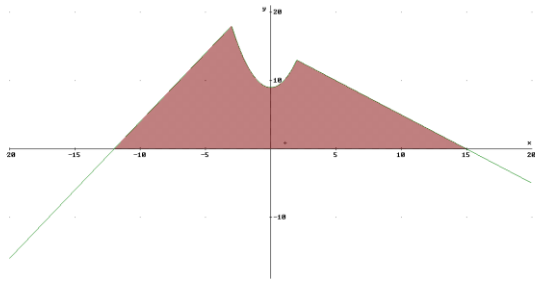
b) Recta tangente en $x = 1$. Derivando: $f'(x) = \begin{cases} 2 & si \quad x < -3 \\ 2x & si \quad -3 < x < 2 \\ -1 & si \quad x > 2 \end{cases}$

Así: $f'(1) = 2$, como $f(1) = 10$, la recta tangente será: $y - 10 = 2(x-1) \Rightarrow \boxed{2x - y + 8 = 0}$

c) $A = \displaystyle\int_{-12}^{-3} (2x + 24)\,dx + \int_{-3}^{2} (x^2 + 9)\,dx + \int_{2}^{15} (-x + 15)\,dx =$

$$=\left[x^2+24x\right]_{-12}^{-3}+\left[\frac{x^3}{3}+9x\right]_{-3}^{2}+\left[-\frac{x^2}{2}+15x\right]_{2}^{15}=$$

$$=81+\frac{170}{3}+\frac{169}{2}=\boxed{\frac{1333}{6}}$$



---

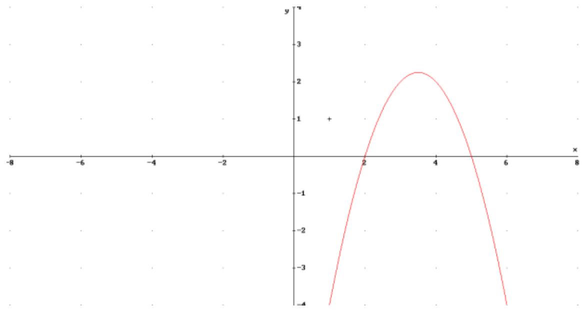
65) Sea $B(x)=-x^2+7x-10$ función beneficio

a) Representación gráfica. Se trata de una parábola

Corte con OX.- $B(x)=-x^2+7x-10=0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x=2 \\ x=5 \end{array}\right.$

Luego $(2{,}0)$ y $(5{,}0)$

Corte con OY.- $(0{,}10)$



b) Derivando e igualando a cero : $B'(x)=-2x+7=0 \Rightarrow x=\frac{7}{2}$. Derivando de nuevo: $B''(x)=-2<0$

Luego $\boxed{x=\frac{7}{2}\,Hl}$ es máximo. El beneficio para esta cantidad es $B\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{9}{4}$ miles de euros, es decir: $\boxed{2250\,euros}$.

c) El beneficio es positivo entre 2 y 5, luego para no incurrir en pérdidas la producción tiene que estar entre $\boxed{2\ y\ 5\ Hl}$

---

66) Vértices del rectángulo *BOAC* son $B(0,b)$, $O(0{,}0)$, $A(a{,}0)$, $C(a,b)$, $a>0$, $b>0$,

a) Si $a=3$, como $C(a,b)$ está en $y=-x^2+12$, se tiene que $b=-a^2+12=-9+12=3$.

Luego $\boxed{C(3{,}3)}$, $\boxed{B(0{,}3)}$, $\boxed{A(3{,}0)}$ y $\boxed{O(0{,}0)}$.

Al ser un rectángulo de lado 3 (es un cuadrado) su área será: $\boxed{A=3^2=9}$

b) En general, $Area(R)=ab$, como b está en la parábola $y=-x^2+12$, $b=-a^2+12$, sustituyendo:

$Area(a)=a\cdot(-a^2+12)=-a^3+12a$. Derivando: $A'(a)=-3a^2+12=0 \Rightarrow a=\pm 2$, como $a>0$, $a=2$.

Derivando de nuevo: $A''(a)=-6a \Rightarrow A''(2)=-12<0$, luego se trata de un máximo. Para este valor $b=8$

Así, los vértices serán: $\boxed{O(0{,}0),\ A(2{,}0),\ B(0{,}8),\ C(2{,}8)}$

c) Area máxima sería $\boxed{Area(R)=2\cdot 8=16}$

---

67) Sea la función: $f(x)=\begin{cases} x+4 & si \quad x<0 \\ 4-x^2 & si \quad 0\le x\le 2 \\ ax+b & si \quad x>2 \end{cases}$

a) Continuidad y derivabilidad en $x=2$

- Continuidad.- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(4-x^2\right)=0$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(ax+b\right)=2a+b$

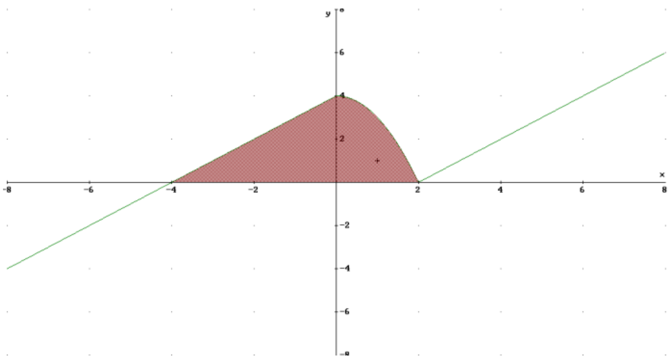
  Igualando: $2a+b=0$ (*)

- Derivabilidad.- $f'(x)=\begin{cases} 1 & si \quad x<0 \\ -2x & si \quad 0<x<2 \\ a & si \quad x>2 \end{cases}$ Así: $f'(2^-)=-4$ y $f'(2^+)=a$. Igualando: $\boxed{a=-4}$

Sustituyendo en la ecuación: $-8+b=0\Rightarrow \boxed{b=8}$

b) Recta tangente en $x=1$.- $y-f(1)=f'(1)(x-1)$. Como $f'(1)=-2$ y $f(1)=3$, se tendrá:

$y-3=-2(x-1)\Rightarrow \boxed{2x+y-5=0}$



c) Si $a=1, b=-2$, $f(x)=\begin{cases} x+4 & si \quad x<0 \\ 4-x^2 & si \quad 0\le x\le 2 \\ x-2 & si \quad x>2 \end{cases}$

$$A=\int_{-4}^{0}(x+4)\,dx+\int_{0}^{2}\left(4-x^2\right)dx=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}+4x\right]_{-4}^{0}+\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2}=-\left(\frac{16}{2}-16\right)+\left(8-\frac{8}{3}\right)=-(-8)+\frac{16}{3}=\boxed{\frac{40}{3}}$$

---

68) Sea $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$. Dominio $R-\{1\}$

a) Asíntotas.

- Verticales.- Como $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)=\dfrac{1}{0}=\pm\infty$, es asíntota la recta: $\boxed{x=1}$

- Horizontales.- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)=\pm\infty$. No tiene

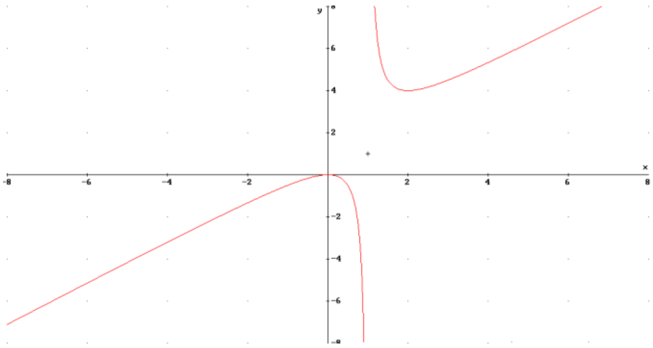
- Oblicuas.- $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x^2}{x-1}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2-x}\right)=1$. Como la asíntota es $y=mx+n$

  $n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=1$, luego asíntota oblicua $\boxed{y=x+1}$

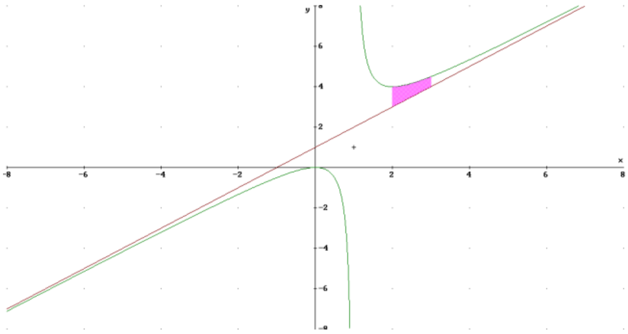
b) Máximos y mínimos.- Derivando e igualando a cero $f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0 \Rightarrow x(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$

	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Creciente	Decreciente	Creciente

Luego $\boxed{(0,0)}$ es máximo y $\boxed{(2,4)}$ mínimo



c) La recta $y=x+1$ y la curva no se cortan (es una asíntota)



$$A=\int_2^3\left(\frac{x^2}{x-1}-(x+1)\right)dx=\int_2^3\left(\frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$=\left[\ln(x-1)\right]_2^3=\ln 2-\ln 1=\boxed{\ln 2}$$

---

69) Sea $f(x)=\begin{cases} -x^2-x+a & si \quad x\le 1 \\ \dfrac{3}{bx} & si \quad x>1 \end{cases}$

a) Continuidad.- En $x=1$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(-x^2-x+a\right)=-2+a$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{bx}\right)=\dfrac{3}{b}$

Igualando: $-2+a=\dfrac{3}{b}$ (*)

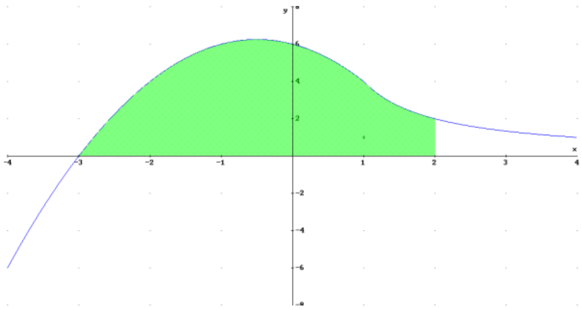
Derivabilidad.- $f'(x)=\begin{cases} -2x-1 & si \quad x<1 \\ -\dfrac{3}{bx^2} & si \quad x>1 \end{cases}$ Así: $f'(1^-)=-3$ y $f'(1^+)=-\dfrac{3}{b}$. Igualando: $-3=-\dfrac{3}{b}\Rightarrow \boxed{b=1}$

Sustituyendo en (*) : $-2+a=3\Rightarrow \boxed{a=5}$

b) Si $a=6$, $b=3/4$, $f(x)=\begin{cases} -x^2-x+6 & si \quad x\le 1 \\ \dfrac{4}{x} & si \quad x>1 \end{cases}$

<u>Corte con ejes</u>: <u>Con OX</u> $\left.\begin{cases} -x^2-x+6=0 \\ 4/x\ne 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow x=-3,\ x=2$ (no es válida, pues $x\le 1$), luego $\boxed{(-3,0)}$

<u>Con OY</u>.- Si $x=0\Rightarrow y=6$, luego $\boxed{(0,6)}$



c) $A=\displaystyle\int_{-3}^{1}\left(-x^2-x+6\right)dx+\int_{1}^{2}\left(\frac{4}{x}\right)dx=$

$=\left[-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+6x\right]_{-3}^{1}+\left[4\ln(x)\right]_1^2=$

$=\boxed{\dfrac{56}{3}+4\ln 2}$

---

70) Sea $x=$longitud lado horizontal ; $y=$longitud lado vertical. Sabemos que área es 2 m^2, luego $xy=2$

Coste $=25x+50y$. Despejando del área $y=\dfrac{2}{x}$, sustituyendo: $C(x)=25x+50\cdot\dfrac{2}{x}=25x+\dfrac{100}{x}$

Derivando e igualando a cero : $C'(x)=25-\dfrac{100}{x^2}=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=2$ (no vale la solución negativa)

Derivando de nuevo: $C''(x)=\dfrac{200}{x^3}\Rightarrow C''(2)=\dfrac{200}{8}>0$, luego $x=2$ mínimo.

Sustituyendo $y=1$. Con lo que sol: $\boxed{2\,m\,de\,l\arg o}$ y $\boxed{1\,m\,de\,ancho}$

---

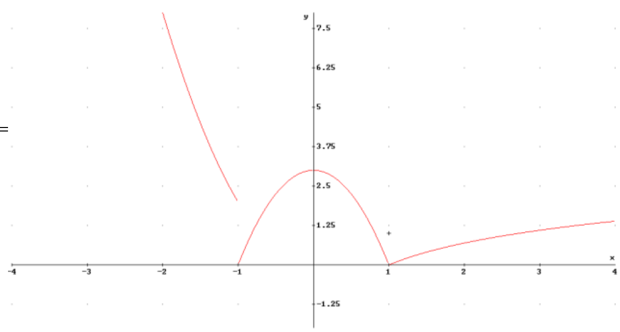
71) Sea $f(x)=\begin{cases} 2x^2-a & si & x\le -1 \\ -3x^2+b & si & -1<x<1 \\ \log x+a & si & x\ge 1 \end{cases}$

a) <u>Continuidad</u>.- En $x=-1$; $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\left(2x^2-a\right)=2-a$; $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\left(-3x^2+b\right)=-3+b$

Igualando: $2-a=-3+b\Rightarrow a+b=5$

En $x=1$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(-3x^2+b\right)=-3+b$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\log x+a\right)=a$. Igualando: $a=-3+b$

Se forma así el sistema: $\left.\begin{cases} a+b=5 \\ a=-3+b \end{cases}\right\}\Rightarrow \boxed{a=1}$, $\boxed{b=4}$



b) Sea $a=0, b=3$. $f(x)=\begin{cases} 2x^2 & si \quad x\le -1 \\ -3x^2+3 & si \quad -1<x<1 \\ \log x & si \quad x\ge 1 \end{cases}$

c) Sea $a=0, b=3$.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}\left(-3x^2+3\right)dx==\left[-\frac{3x^3}{3}+3x\right]_{-1}^{1}=$$

$$=(-1+3)-(1-3)=2+2=\boxed{4}$$

---

72) Sea $f(x)=x^3-3x^2+4$ (Su dominio es R)

a) Calculamos <u>punto de inflexión</u>. Derivando: $f'(x)=3x^2-6x \Rightarrow f''(x)=6x-6=0 \Rightarrow x=1$

Luego el punto de inflexión es $(1,2)$. La recta tangente en ese punto será:

$y-2=f'(1)(x-1)$. Como $f'(1)=-3$, se tendrá: $y-2=-3(x-1)\Rightarrow \boxed{3x+y-5=0}$

b) <u>Extremos relativos</u>.- Como $f'(x)=3x^2-6x=0 \Rightarrow 3x(x-2)=0 \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} x=0 \\ x=2 \end{matrix} \right.$

Sustituyendo en la 2ª derivada: $\left\langle \begin{matrix} f''(0)=-6<0 \\ f''(2)=6>0 \end{matrix} \right.$, luego: $\boxed{(0,4)}$ es máximo y $\boxed{(2,0)}$ mínimo

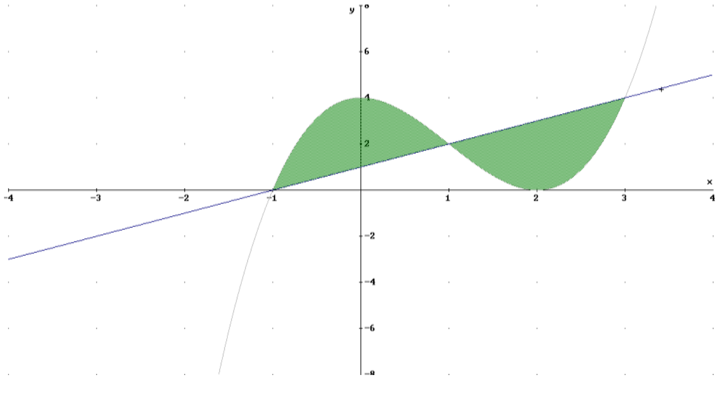
c) Calculamos puntos de corte de $f(x)=x^3-3x^2+4$ con la recta $y=x+1$

$x^3-3x^2+4=x+1 \Rightarrow x^3-3x^2-x+3=0 \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} x=\pm 1 \\ x=3 \end{matrix} \right.$, luego (-1,0), (1,2) y (3,4)

Area:

$$\int_{-1}^{1}\left(x^3-3x^2+4-x-1\right)dx+\int_{1}^{3}\left(x+1-x^3+3x^2-4\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(x^3-3x^2+3-x\right)dx+\int_{1}^{3}\left(x-x^3+3x^2-3\right)dx=$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-x^3+3x-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+x^3-3x\right]_{1}^{3}=4+4=\boxed{8}$$



73) Sea $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si \quad x<0 \\ ax+b & si \quad 0\le x\le 3 \\ x-5 & si \quad x>3 \end{cases}$

a) Continuidad.- En $x=-1$; $\lim\limits_{x\to -0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+1\right)=1$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(ax+b\right)=b$

Igualando: $\boxed{b=1}$

En $x=3$; $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\left(ax+b\right)=3a+b$; $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\left(x-5\right)=-2$. Igualando: $3a+b=-2$

Como $b=1$, $\boxed{a=-1}$

b) Derivabilidad.- Sustituyendo los valores anteriores $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si \quad x<0 \\ -x-2 & si \quad 0\le x\le 3 \\ x-5 & si \quad x>3 \end{cases}$

Derivando: $f'(x)=\begin{cases} 2x & si \quad x<0 \\ -1 & si \quad 0<x<3 \\ 1 & si \quad x>3 \end{cases}$. En $x=3$, $f'(3^-)=-1$ y $f'(3^+)=1$, luego no existen dichos valores.

c) Sea $a=4$, $b=-1$. $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si \quad x<0 \\ 4x-1 & si \quad 0\le x\le 3 \\ x-5 & si \quad x>3 \end{cases}$

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{2} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}(x^2+1)\,dx+\int_{0}^{2}(4x-1)\,dx==\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{0}+\left[2x^2-x\right]_0^2=$$

$$=-\left(-\frac{1}{3}-1\right)+(8-2)=\frac{4}{3}+6=\boxed{\frac{22}{3}}$$

---

74) Sea $f(x)=\dfrac{3x}{x^2-2}$,

a) Su dominio es $R-\{\pm\sqrt{2}\}$

Asíntotas:

Verticales.- Como $\lim\limits_{x\to -\sqrt{2}} f(x)=\lim\limits_{x\to -\sqrt{2}}\left(\dfrac{3x}{x^2-2}\right)=\dfrac{1}{0}=\pm\infty$, es asíntota la recta: $\boxed{x=-\sqrt{2}}$

$\lim\limits_{x\to \sqrt{2}} f(x)=\lim\limits_{x\to \sqrt{2}}\left(\dfrac{3x}{x^2-2}\right)=\dfrac{1}{0}=\pm\infty$, es asíntota la recta: $\boxed{x=\sqrt{2}}$

Horizontales.- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{x^2-2}\right)=0$. Luego $\boxed{y=0}$

Çortes con los ejes: Con OX: $y=0\Rightarrow x=0$, luego $\boxed{(0,0)}$

Con OY: $x=0 \Rightarrow y=0$, luego $(0,0)$

b) Recta tangente en $x=1$.- $y-f(1)=f'(1)(x-1)$.

Derivando: $f'(x)=\dfrac{-6-3x^2}{(x^2-2)^2} \Rightarrow f'(1)=-9$. Como $f'(1)=-9$ y $f(1)=-3$, se tendrá:

$y+3=-9(x-1) \Rightarrow \boxed{9x+y-6=0}$

c) $\displaystyle\int \left(\frac{3x}{x^2-2}\right)dx=\frac{3}{2}\int\left(\frac{2x}{x^2-2}\right)dx=\frac{3}{2}\ln(x^2-2)+C$

Así: $\displaystyle\int_2^3 \left(\frac{3x}{x^2-2}\right)dx==\left[\frac{3}{2}\ln(x^2-2)\right]_2^3=\left(\frac{3}{2}\ln 7\right)-\left(\frac{3}{2}\ln 2\right)=\boxed{\frac{3}{2}(\ln 7-\ln 2)}$

---

75) Sea $f(x)=\begin{cases} \dfrac{a}{x} & si \quad x\le -1 \\ \dfrac{x^2-b}{4} & si \quad x>-1 \end{cases}$

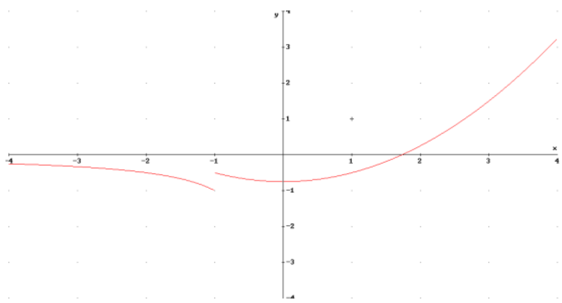
a) Continuidad.- En $x=-1$. $\displaystyle\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1}\left(\frac{a}{x}\right)=-a$; $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1}\left(\frac{x^2-b}{4}\right)=\frac{1-b}{4}$

Igualando: $-a=\dfrac{1-b}{4}$

Derivabilidad.- Derivando: $f'(x)=\begin{cases} -\dfrac{a}{x^2} & si \quad x<-1 \\ \dfrac{x}{2} & si \quad x>-1 \end{cases}$, luego $f'(-1^-)=-a$; $f'(-1^+)=-\dfrac{1}{2}$

Igualando: $\boxed{a=\dfrac{1}{2}}$. Sustituyendo en la otra ecuación: $-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1-b}{4} \Rightarrow -4=2(1-b) \Rightarrow 1-b=-2 \Rightarrow \boxed{b=3}$

b) Sea $a=1$, $b=3$, se tiene: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & si \quad x\le -1 \\ \dfrac{x^2-3}{4} & si \quad x>-1 \end{cases}$



c) $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx=6 \Rightarrow \int_0^3 \left(\frac{x^2-b}{4}\right)dx=6 \Rightarrow \left[\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{bx}{4}\right]_0^3=6 \Rightarrow \frac{27}{12}-\frac{3b}{4}=6 \Rightarrow \frac{9-3b}{4}=6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9-3b=24 \Rightarrow 3b=-15 \Rightarrow \boxed{b=-5}$

---

76) Sea $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$, su dominio es R

a) <u>Asíntotas</u>.- <u>Horizontales:</u> Como $x^2+1\neq 0$, no tiene

<u>Verticales</u>: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}\right)=1 \Rightarrow \boxed{y=1}$

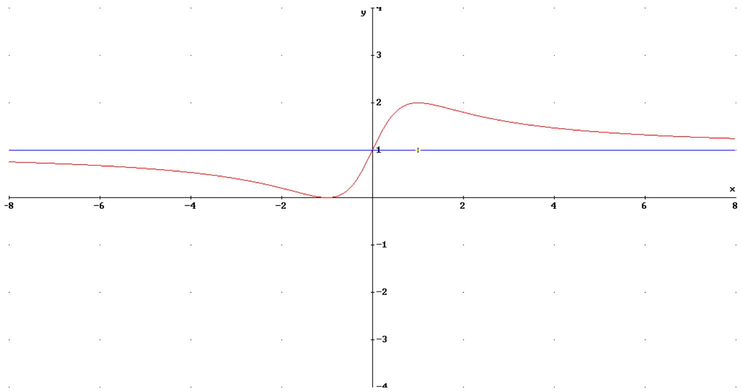
<u>Oblicuas</u>.- No tiene pues tiene horizontales

<u>Extremos</u>.- Derivando: $f'(x)=\dfrac{2-2x^2}{(x^2+1)}=0 \Rightarrow x=\pm 1$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decrece ↘	crece ↗	decrece ↘

Luego $\boxed{(-1,0)}$ mínimo y $\boxed{(1,2)}$ máximo

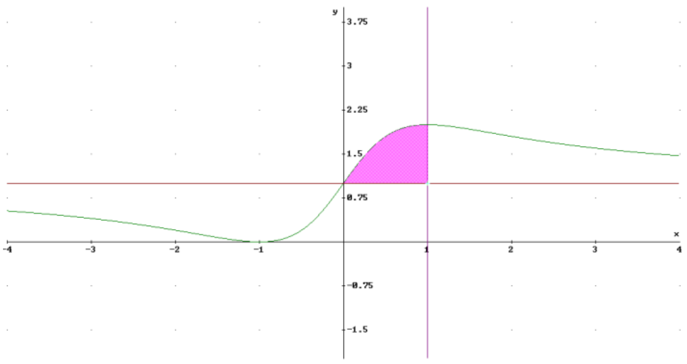
b) Representación gráfica :



c) $Area=\displaystyle\int_0^1\left(\frac{(x+1)^2}{x^2+1}-1\right)dx=$

$=\displaystyle\int_0^1\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)dx=\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1=$

$=\ln 2-\ln 1=\boxed{\ln 2}$



---

77) Sea un rectángulo R de lados x e y

a) Supongamos que el perímetro es 12 m. Se tiene que $2x+2y=12 \Rightarrow x+y=6 \Rightarrow y=6-x$

Area $=xy \Rightarrow$ sustituyendo: $A(x)=x(6-x)=6x-x^2$. Derivando: $A'(x)=6-2x=0 \Rightarrow x=3$

Derivando de nuevo: $A''(x)=-2<0 \Rightarrow x=3$ máximo. Luego solución: cuadrado de $\boxed{3\,m\,de\,lado}$

b) Si $A(R)=36 \Rightarrow xy=36 \Rightarrow y=\frac{36}{x}$. Perímetro: $P=2x+2y$, sustituyendo: $P(x)=2x+\frac{72}{x}$

Derivando: $P'(x)=2-\frac{72}{x^2}=0 \Rightarrow x^2=36 \Rightarrow x=6$. Derivando de nuevo: $P''(x)=\frac{144}{x^3} \Rightarrow$

$\Rightarrow P''(6)=\frac{2}{3}$, luego $x=6$ es mínimo. Solución: cuadrado de $\boxed{6\, m\, de\, lado}$

---

78) Sea $x=$número de cepas a añadir. La función a maximizar es: $f(x)=(1200+x)(16-0.01x)$

Operando: $f(x)=19200+4x-0.01x^2$.

Derivando e igualando a cero: $f'(x)=4-0.012x=0 \Rightarrow x=200$

Comprobando en la 2ª derivada: $f''(x)=-0.012<0 \Rightarrow$ Máximo $\boxed{200\, cepas}$

---

79) $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & si \quad x\le 1 \\ -x^2+4x-3 & si \quad x>1 \end{cases}$

a) Continuidad.- En $x=1$.

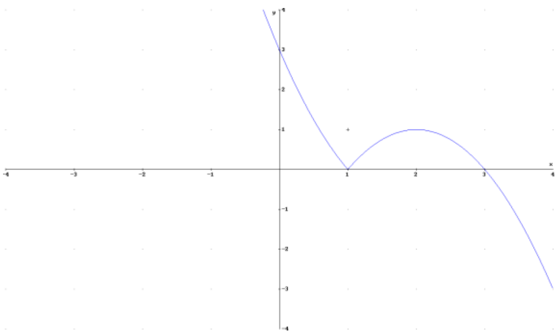
$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1}\left(x^2-4x+3\right)=0=\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1}\left(-x^2+4x-3\right)=0$. Continua en R

Derivabilidad.- En $x=1$.

Derivando: $f'(x)=\begin{cases} 2x-4 & si \quad x<1 \\ -2x+4 & si \quad x>1 \end{cases}$ luego $f'(1^-)=-2$; $f'(1^+)=2$. Derivadas laterales distintas.

No es derivable en $x=1$

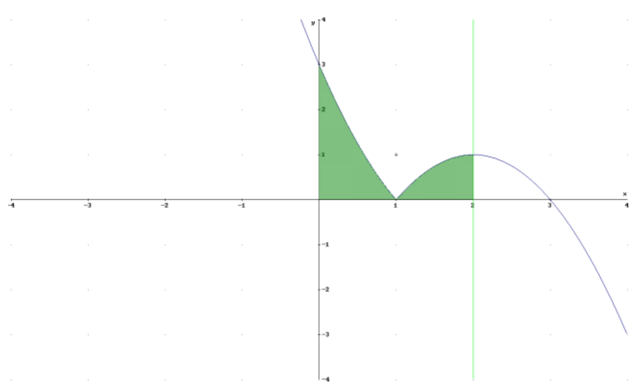
b)



c) $Area=\int_0^1\left(x^2-4x+3\right)dx+\int_1^2\left(-x^2+4x-3\right)dx=$

$=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_0^1+\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x\right]_1^2=\left(\frac{1}{3}-2+3\right)+$

$+\left(-\frac{8}{3}+8-6\right)-\left(-\frac{1}{3}+2-3\right)=1+\frac{1}{3}+2-\frac{8}{3}+\frac{1}{3}+1=\boxed{2}$



80) Sea la función $f(x)=\dfrac{x(2x-1)}{x-1}$

a) Asíntotas

- Verticales.- Como $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{2x^2-x}{x-1}\right)=\dfrac{2}{0}=\pm\infty$, es asíntota la recta $\boxed{x=1}$

- Horizontales.- No tiene pues $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-x}{x-1}\right)=+\infty$

- Oblicuas.- $m=\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{2x^2-x}{x-1}\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(\dfrac{2x^2-x}{x(x-1)}\right)\right)=2$. Como la asíntota es $y=mx+n$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\left(\frac{2x^2-x}{x-1}\right)-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)=1$$, luego asíntota oblicua $\boxed{y=2x+1}$

Extremos relativos

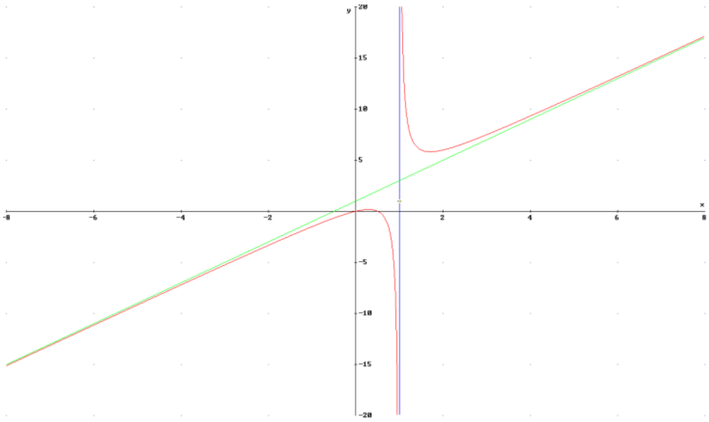
Derivando e igualando a cero $f'(x)=\dfrac{2x^2-4x+1}{(x-1)^2}=0\Rightarrow 2x^2-4x+1=0\Rightarrow x=1\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Derivando de nuevo $f'(x)=\dfrac{2}{(x-1)^3}$. Evaluando en los puntos críticos:

$$f''\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2}{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^3}=\frac{2}{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}=-4\sqrt{2}<0\Rightarrow\boxed{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2},3-2\sqrt{2}\right)}$$ es máximo relativo

$$f''\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2}{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^3}=\frac{2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}=4\sqrt{2}>0\Rightarrow\boxed{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2},3+2\sqrt{2}\right)}$$ es mínimo relativo

b) Representación gráfica



c) Calculamos primero $\int \frac{f(x)}{x^2}dx = \int \frac{\frac{x(2x-1)}{x-1}}{x^2}dx = \int \frac{2x-1}{x(x-1)}dx = \int \frac{A}{x}dx + \int \frac{B}{x-1}dx$

Calculando A y B: $2x-1 = A(x-1)+Bx = (A+B)x - A$. Igualando coeficientes: $\left\{ \begin{matrix} -A=-1 \\ A+B=2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow A=1 ; B=1$

Sustituyendo en la integral: $\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x-1} = \ln(x) + \ln(x-1) + C$

Así $\int_2^5 \frac{f(x)}{x^2}dx = [\ln(x)+\ln(x-1)]_2^5 = (\ln(5)+\ln(4)) - (\ln(2)-\ln(1)) = \ln(5)+\ln(4)-\ln(2) =$

aplicando propiedades de los logaritmos $= \ln\left(\frac{20}{2}\right) = \boxed{\ln(10)}$

---

81) Sea la función $f(x) = \begin{cases} ax+b & si \quad x \le 1 \\ x^3-x^2+1 & si \quad x>1 \end{cases}$

a) Continuidad.- En $x=1$.

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1}(ax+b) = a+b = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1}(x^3-x^2+1) = 1 \Rightarrow a+b=1$.

Derivabilidad.- En $x=1$.

Derivando: $f'(x) = \begin{cases} a & si \quad x<1 \\ 3x^2-2x & si \quad x>1 \end{cases}$ luego $f'(1^-) = a = f'(1^+) = 1 \Rightarrow \boxed{a=1}$

Sustituyendo en la ecuación anterior: $1+b=1 \Rightarrow \boxed{b=0}$

b) Si $a=0$ y $b=1$, $f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \le 1 \\ x^3-x^2+1 & si \quad x>1 \end{cases}$

Si la ecuación de la recta tangente en un punto $(x_0, f(x_0))$ es paralela a la recta $y-8x=1$, la pendiente de la recta tangente será 8, es decir: $f'(x_0)=8$

Derivando $f'(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x<1 \\ 3x^2-2x & si \quad x>1 \end{cases}$, luego $3x_0{}^2 - 2x_0 = 8 \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} x_0 = -4/3 < 1 \,(\text{no válida}) \\ x_0 = 2 \end{matrix} \right.$

Luego el punto pedido es $(2, f(2)) = \boxed{(2,5)}$

c) Si $a=1$ y $b=0$, $f(x) = \begin{cases} x & si \quad x \le 1 \\ x^3-x^2+1 & si \quad x>1 \end{cases}$, $g(x) = 1-2x^2$

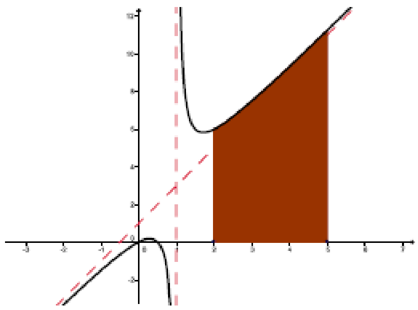
Calculamos los puntos de corte entre ambas funciones

- Si $x>1 \Rightarrow x^3-x^2+1 = 1-2x^2 \Rightarrow x^3+x^2=0 \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} x=0 \\ x=-1 \end{matrix} \right.$ ambos menores que 1. No se cortan

- Si $x \le 1 \Rightarrow x = 1 - 2x^2 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x = 1/2 \\ x = -1 \end{array} \right.$ ambos menores que unen. Se cortan

Con esto el área pedida será:

$$Area = \int_{-1}^{1/2} (g(x) - f(x))\, dx = \int_{-1}^{1/2} \left(1 - 2x^2 - x\right) dx$$



Calculamos la primitiva $\int \left(1 - 2x^2 - x\right) dx = x - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C$

Luego:

$$\int_{-1}^{1/2} \left(1 - 2x^2 - x\right) dx = \left[x - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{1/2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{24} - \frac{1}{8} \right) -$$

$$-\left(-1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{7}{24} + \frac{5}{6} = \boxed{\frac{9}{8}}$$

---

82) Sea la función $f(x) = 3e^{-2x}$

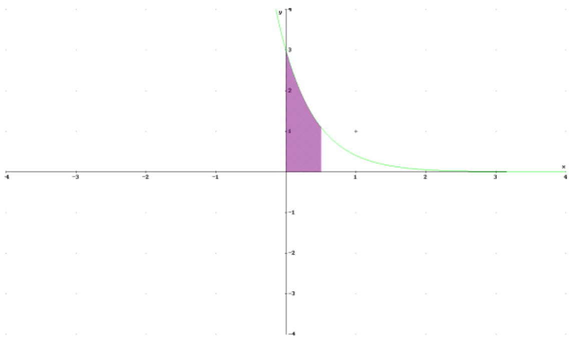
a) Ecuación recta tangente en $x = 0$: $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ (1)

Derivando: $f'(x) = -6e^{-2x} \Rightarrow f'(0) = -6$. Como $f(0) = 3$, sustituyendo en (1)

$y - 3 = -6(x - 0) \Rightarrow \boxed{6x + y - 3 = 0}$

b) El área pedida será:

$$Area = \int_{0}^{1/2} 3e^{-2x}\, dx =$$



$$\left[-\frac{3e^{-2x}}{2} \right]_0^{1/2} = -\frac{3e^{-1}}{2} + \frac{3e^0}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3e^{-1}}{2} = \boxed{\frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)}$$

---

83) Sea la función $f(x) = \begin{cases} e^x & si \quad x < 0 \\ \dfrac{a + 3x}{x^2 - 4x + 3} & si \quad x \ge 0 \end{cases}$

a) Continuidad.- En $x = 0$. $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(e^x\right) = 1$; $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{a + 3}{x^2 - 4x + 3} \right) = \frac{a}{3}$

Igualando: $\frac{a}{3} = 1 \Rightarrow \boxed{a = 3}$

b) Asíntotas

- Verticales.- Resolviendo: $x^2-4x+3=0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array} \right.$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{a+3}{x^2-4x+3}\right)=\pm\infty$, es asíntota la recta $\boxed{x=1}$

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{a+3}{x^2-4x+3}\right)=\pm\infty$, es asíntota la recta $\boxed{x=3}$

- Horizontales.- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{a+3}{x^2-4x+3}\right)=0$, es asíntota la recta $\boxed{y=0}$
- Oblicuas.-. No hay

---

84) Sea la función $f(x)=x(5-x)^2$**.**

a) Crecimiento-Decreciniento Derivando: $f'(x)=3x^2-20x+25$. Igualando a cero $\left\langle \begin{array}{l} x=5/3 \\ x=5 \end{array} \right.$

En $\left(-\infty,\dfrac{5}{3}\right)\cup(5,+\infty)$ la función crece ; en $\left(\dfrac{5}{3},5\right)$ la función decrece ;

b) Concavidad-Convexidad Derivando dos veces: $f''(x)=6x-20$. Igualando a cero $x=\dfrac{10}{3}$

En $\left(-\infty,\dfrac{10}{3}\right)$ la función es cóncava ($\cup$); En $\left(\dfrac{10}{3},+\infty\right)$ la función es convexa ($\cap$)

---

85) Sea la función $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-9}$**.**

a) Asíntotas

- Verticales.- Resolviendo: $x^2-9=0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x=-3 \\ x=3 \end{array} \right.$

$\lim\limits_{x\to -3} f(x)=\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{x^3}{x^2-9}\right)=\pm\infty$, es asíntota la recta $\boxed{x=-3}$

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^3}{x^2-9}\right)=\pm\infty$, es asíntota la recta $\boxed{x=3}$

- Horizontales.- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2-9}\right)=\infty$, No tiene
- Oblicuas.- $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{x^3}{x^2-9}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^3-9x}\right)=1$. Como la asíntota es $y=mx+n$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\left(\frac{x^3}{x^2-9}\right)-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{9x}{x^2-1}\right)=0$$, luego asíntota oblicua $\boxed{y=x}$

b) Ecuación recta tangente en $x=1$: $y-f(1)=f'(1)(x-1)$ (*)

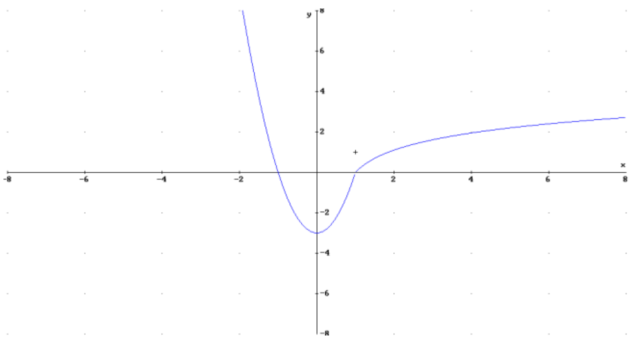
Derivando: $f'(x)=\dfrac{x^4-27x^2}{(x^2-9)^2}\Rightarrow f'(1)=-\dfrac{13}{32}$. Como $f(1)=-\dfrac{1}{8}$, sustituyendo en (*) $\boxed{y+\dfrac{1}{8}=-\dfrac{13}{32}(x-1)}$

---

86) Sea la función $f(x)=\begin{cases} ax^2-3 & si \quad x\le 1 \\ \ln(2x-1) & si \quad x>1\end{cases}$

a) <u>Continuidad</u>.- En $x=1$. $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1}\left(ax^2-3\right)=a-3$; $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1}\left(2x-1\right)=\ln(1)=0$

Igualando: $a-3=0\Rightarrow \boxed{a=3}$



b) Si $a=3\Rightarrow f(x)=\begin{cases} 3x^2-3 & si \quad x\le 1 \\ \ln(2x-1) & si \quad x>1\end{cases}$

Corta a los ejes en (-1,0) y (1,0).

En $\left(-\infty,0\right)$ la función decrece ;

En $\left(0,+\infty\right)$ la función crece.

Tiene un mínimo en (0,-3)

---

87) Sea la función : $f(x)=\dfrac{x}{x^2+2}$. Su dominio es R

a) Derivando e igualando a cero $f'(x)=\dfrac{x^2+4-2x^2}{(x^2+4)^2}=\dfrac{4-x^2}{(x^2+4)^2}=0\Rightarrow x^2-4=0\Rightarrow x=\pm 2$

Estudiando el signo de la primera derivada:

	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente

Luego: $\boxed{\left(-2,-1/4\right)}$ es un mínimo relativo y $\boxed{\left(2,1/4\right)}$ es un máximo relativo.

b) Calculamos primero $\displaystyle\int f(x)\,dx=\int\frac{x}{x^2+4}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+4}\,dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+C$

Así $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+4)\right]_0^1=\frac{1}{2}\left(\ln(5)-\ln(4)\right)=\boxed{\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{5}{4}\right)}$

---

88) Sea $f(x)=\begin{cases} x+a & si \quad x<1 \\ x^2-2 & si \quad 1\le x\le 3 \\ x+b & si \quad x>3 \end{cases}$.

a) Estudiamos la continuidad en los puntos 1 y 3

- En x = 1

$\lim\limits_{x\to 1^{-1}} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x+a)=1+a$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2)=-1$

Igualando: $1+a=-1\Rightarrow \boxed{a=-2}$

- En x = 3

$\lim\limits_{x\to 3^{-1}} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}(x^2-2)=7$; $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}(x+b)=3+b$

Igualando: $7=3+b\Rightarrow \boxed{b=-4}$

b) $\int_1^3 f(x)\,dx=\int_1^3 (x^2-3)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-3x\right]_1^3+\left(\frac{27}{3}-9\right)-\left(\frac{1}{3}-3\right)=3-\frac{1}{3}=\boxed{\frac{8}{3}}$

---

89) Sea $f(x)=4x^3-3x^2-2x$. Recta tangente en $x=1$. Su ecuación es: $y-f(1)=f'(1)(x-1)$

Derivando $f'(x)=12x^2-6x-2$. Así: $f'(1)=4$. Como $f(1)=-1$, se tiene: $\boxed{y+1=4(x-1)}$

b) $\int_2^3 (4x^3-3x^2-2x)\,dx=\left[\frac{4x^4}{4}-\frac{3x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}\right]_2^3=\left[x^4-x^3-x^2\right]_2^3=45-4=\boxed{41}$

---

90) Sea la función $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$.

a) Asíntotas.-

- Verticales.- Resolviendo: $x-2=0\Rightarrow x=2$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x^2}{x-2}\right)=\pm\infty$, es asíntota la recta $\boxed{x=2}$

- Horizontales.- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-2}\right)=\infty$, No tiene

- Oblicuas.- $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{x^2}{x-2}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-2x}\right)=1$. Como la asíntota es $y=mx+n$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\left(\frac{x^2}{x-2}\right)-x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x^2+2x}{x-2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{x-2}\right) = 2$$, luego asíntota $\boxed{y = x+2}$

b) Crecimiento-Decreciniento Derivando: $f'(x) = \dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2}$. Igualando a cero $\left\langle \begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$

Como el dominio es $R-\{2\}$, estudiando el signo de la 1ª derivada:

En $(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$ la función crece ; en $(0,2)\cup(2,4)$ la función decrece

---

91) Sea la función $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x(x-2)}$

a) Asíntotas.- Verticales.- $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 2}\left(\dfrac{(x-3)^2}{x(x-2)}\right) = \pm\infty$. Es asíntota la recta $\boxed{x=0}$

$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\left(\dfrac{(x-3)^2}{x(x-2)}\right) = \pm\infty$. Es asíntota la recta $\boxed{x=2}$

Horizontales.- $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{(x-3)^2}{x(x-2)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-2x}\right) = 1$, luego $\boxed{y=1}$

Oblicuas.- No tiene, pues tiene horizontales

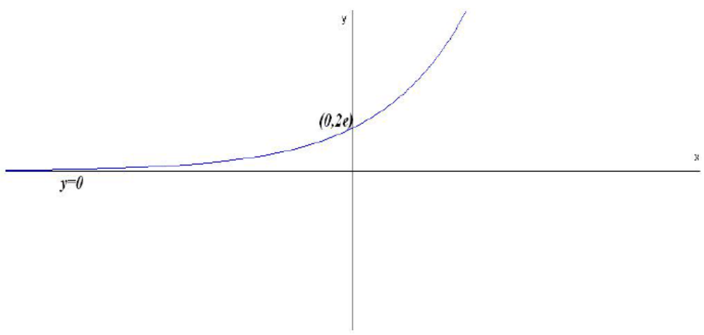
b) Derivando: $f'(x) = \dfrac{2(x-3)(2x-3)}{x^2(x-2)^2}$. Evaluando $f'(4) = \dfrac{10}{64} > 0$, luego creciente

---

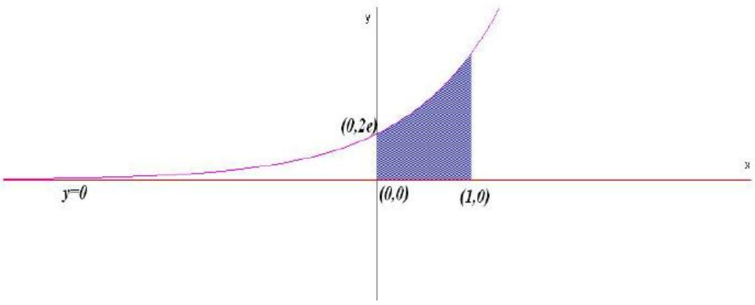
92) Sea la función $f(x) = 2e^{x+1}$. Es siempre positiva y su dominio es R

a) Derivando: $f'(x) = 2e^{x+1} \neq 0$. luego no tiene ni máximos ni mínimos. Es más, siempre es creciente. Como $2e^{x+1} \neq 0$, no corta al eje OX, al eje OY en (0,2e)

Por último, $\lim_{x\to-\infty} 2e^{x+1} = 0$, luego el semieje OX negativo es asíntota horizontal.



b) El área pedida será: $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (2e^{x+1})\,dx = \left[2e^{x+1}\right]_0^1 = \left(2e^2\right) - \left(2e\right) = \boxed{2e(e-1)}$



---

93) Sea la función $f(x) = \dfrac{\lambda x}{4+x^2}$.

a) Si la recta tangente a la función en $x=-1$ es paralela a $y = 2x-3$, se tendrá que $f'(-1) = 2$

Derivando en la función $f'(x) = \dfrac{4\lambda - \lambda x^2}{(4+x^2)^2} \Rightarrow f'(-1) = \dfrac{3\lambda}{25} = 2 \Rightarrow \boxed{\lambda = \dfrac{50}{3}}$

b) Si $\lambda = 1$, $f(x) = \dfrac{x}{4+x^2}$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{x}{4+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{2x}{4+x^2}\,dx = \left(\frac{1}{2}\ln(4+x^2)\right)_0^2 = \frac{1}{2}\ln(8) - \frac{1}{2}\ln(4) = \boxed{\frac{1}{2}\ln(2)}$$
